

Complexité et Calculabilité

Contrôle Continu n°2

Durée : 50 minutes

Responsable : Prof. Christian RONSE

Tous documents en papier autorisés mais non partagés

Calculatrices inutiles

Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses

(1) Calcul de fonction par une grammaire.

Soit a un symbole. Donner une grammaire calculant la fonction $a^* \rightarrow (0 \cup 1)^*$ transformant a^n (la suite de n fois a pour $n \in \mathbb{N}$) en la suite de bits de la représentation binaire de n . Par exemple :

$$\begin{aligned}a^0 &= \varepsilon \mapsto 0 , \\a^5 &= aaaaa \mapsto 101 , \\a^{11} &= aaaaaaaaaaa \mapsto 1011 .\end{aligned}$$

Indication : pour $n = 1$, la représentation binaire de n est le bit de $n \text{ MOD } 2$, tandis que pour $n > 1$, la représentation binaire de n est obtenue en concaténant la représentation binaire de $n \text{ DIV } 2$ (la division entière de n par 2) et le bit de $n \text{ MOD } 2$ (le reste de cette division).

(2) Énumération.

Une machine de Turing M énumère le langage $L \subseteq \Sigma^*$, c.-à-d. pour un état q fixé on a :

$$\forall w \in \Sigma^*, \quad (s, \triangleright \sqcup) \vdash^* (q, \triangleright \sqcup w) \iff w \in L .$$

L'énumération des mots de L se fait par longueur croissante, c.-à-d. de sorte que tous les mots sortant après un mot ont leur longueur supérieure ou égale à celle de ce mot-là :

$$\forall u, v \in \Sigma^*, \quad (q, \triangleright \sqcup u) \vdash^* (q, \triangleright \sqcup v) \implies |v| \geq |u| .$$

Le langage L est-il Turing-énumérable ? lexicographiquement Turing-énumérable ? récursivement énumérable ? récursif ? Expliquer.

Indication : regarder les preuves des équivalences (données en cours) concernant l'énumérabilité.