

Complexité et Calculabilité

Contrôle Continu n°3

Durée : 55 minutes

Responsable : Prof. Christian RONSE

Tous documents en papier autorisés mais non partagés

Calculettes inutiles

Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses

Rappel de notations : Σ est un alphabet, Σ^* est l'ensemble des mots sur Σ , $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ est l'ensemble des parties de Σ^* (donc l'ensemble des langages), $wf(w)$ la concaténation des deux mots w et $f(w)$, et $|m|$ désigne la longueur du mot m .

(1) Inversion de fonction et NP.

Soit $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ une fonction calculable en temps polynomial telle que pour tout $w \in \Sigma^*$, $|f(w)| \geq |w|$. Montrer que le problème suivant est NP :

— Etant donné un mot $m \in \Sigma^*$, existe-t-il un mot $w \in \Sigma^*$ tel que $m = f(w)$?

(2) Complexité polynomiale.

Soit $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ une fonction calculable en temps polynomial et soit $g : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ définie par $g(w) = wf(w)$ pour tout $w \in \Sigma^*$.

- (i) Que peut-on dire de $|g(w)|$? La fonction g est-elle calculable en temps polynomial ?
- (ii) La fonction $h : \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*) : m \mapsto \{w \in \Sigma^* \mid g(w) = m\}$ est-elle calculable en temps polynomial ? Le cardinal de $h(m)$ est-il borné ?
- (iii) Soit L un langage P (décidable en temps polynomial). Le langage $L_g = \{g(w) \mid w \in L\}$ est-il P ?