Université de Strasbourg **UFR de Mathématiques et Informatique**
Master 1 ILC et ISI **3 novembre 2014**

Complexité et Calculabilité

Contrôle Continu n°2

Durée : 55 minutes
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents en papier autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses

(1) Semi-décidabilité.
Etant donnés une machine de Turing M sur un alphabet Σ et un mot $w \in (\Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\})^*$, on demande s'il existe un état $q \in K$ tel qu'en démarrant avec le mot w en entrée, pour tout $\sigma \in \Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\}$ on passera au moins une fois dans une configuration d'état q où la tête de lecture lit le caractère σ sur la bande. Formellement parlant, cela s'écrit:

$$\exists\, q \in K,\ \forall\, \sigma \in \Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\}, \quad \exists u, v \in \Sigma^*, \quad (s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash^* (q, u\underline{\sigma}v) \ .$$

Montrer que ce problème est semi-décidable (c.-à-d. l'ensemble des codages "M" "w" des machines de Turing M et mots w pour lesquels la propriété est vérifiée, est récursivement énumérable).

Bonus : Supposons $|\Sigma| \geq 5$, et soit $\$ \in \Sigma \setminus \{\triangleright, \sqcup\}$. Supposons qu'on se restreigne aux mots $w \in (\Sigma \setminus \{\$, \triangleright, \sqcup\})^*$ (ne contenant pas les caractères $\$, \triangleright, \sqcup$). Montrer que le problème est alors indécidable ; concrètement, il existe une machine de Turing M et un mot w tels que sur l'entrée w, avant que M puisse lire \$ sur la bande, il faut d'abord faire quelque chose dont la terminaison est indécidable.

(2) Construction de fonction.
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie comme suit : pour tout naturel n, $f(n)$ est le plus petit naturel m tel que $3^m \geq 2^n$.

(i) Montrer comment calculer, pour un n donné, $f(n)$ en utilisant uniquement les comparaisons $<, \leq, =, \geq, >$, la multiplication, l'addition et l'itération.

(ii) Expliquer comment calculer $f(n+1)$ à partir de $f(n)$, 2^n et $3^{f(n)}$, en utilisant uniquement les comparaisons $<, \leq, =, \geq, >$, la multiplication et l'addition (sans itération).

(iii) La fonction f est-elle récursive primitive ? μ-récursive ? récursive ?