Université de Strasbourg **UFR de Mathématiques et Informatique**
Master 1 ILC et ISI **novembre 2013**

Complexité et Calculabilité

Contrôle Continu n°2

Durée : 35 minutes
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents en papier autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses

(1) Fonctions récursives primitives.
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction sur les entiers naturels strictement croissante, c.-à-d. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) > f(n)$. Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction sur les entiers naturels définie comme suit :

$\forall m \in \mathbb{N}$, $g(m)$ est le plus petit entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) \geq m$.

(*i*) Que vaut $g(0)$?

(*ii*) Supposant que f est effectivement calculable, donner une façon simple pour calculer, $\forall m \in \mathbb{N}$, $g(m+1)$ à partir de $g(m)$, en utilisant f.

(*iii*) Si f est récursive primitive, que peut-on dire de g ?

(Par exemple, prenons $f(n) = 2^n$; alors pour $m > 0$ on a $g(m) = \lceil \log_2(m) \rceil$, le plus petit nombre de bits permettant de coder m données distinctes.)

(2) Décidabilité.
On considère le problème suivant : étant donnés une machine de Turing M d'alphabet Σ avec l'état initial s, et un mot $w \in \Sigma^*$, si on a le mot w en entrée, c.-à-d. la configuration initiale $(s, \triangleright\sqcup w)$, la machine M passera-t-elle une deuxième fois par l'état initial s ?

(*i*) Montrer que ce problème est semi-décidable, c.-à-d. que l'ensemble des codages "M" "w" pour lesquels M avec w en entrée passe une deuxième fois par l'état initial, est un langage récursivement énumérable. (Indication : utiliser pour la semi-décision une variante de la machine de Turing universelle, on peut ajouter des bandes supplémentaires.)

(*ii*) Montrer que ce problème est indécidable, en utilisant l'indécidabilité du problème de l'arrêt. (Indication : à partir d'une machine M_1 on peut construire une machine M_2 telle que sur l'entrée w, M_2 passe une deuxième fois par l'état initial si et seulement si M_1 s'arrête.)