TD5

Calculabilité et indécidabilité

1- On rappelle que la donnée d'un ensemble d'entiers naturels est équivalente à la donnée de sa fonction caractéristique $\mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$. Soit une suite : $E_0, E_1, \ldots$ de tels ensembles avec $E_i \subsetneq \mathbb{N}$. Construire par diagonalisation, un ensemble qui n'appartient pas à cette suite.

2- Une fonction $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ totale, non calculable et croissante peut-elle être bornée ? Montrer que toute fonction $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ totale et décroissante est calculable.

3- On considère une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calculable et bijective. Montrer que la fonction inverse est calculable en exhibant une fonction (au sens de la programmation) C appelée g qui calcule f^{-1}, on suppose alors la fonction `int f(int x)` connue.

4- Soit A un ensemble décidable de couples d'entiers (x,y) ; montrer que la projection $(x,y) \rightarrow x$ de A, c'est-à-dire :

$$E = \{x \mid \exists y (x,y) \in A\}$$

est récursivement énumérable.

5- Soient A et B deux ensembles décidables quelconques, est-on sûr que :
- le complémentaire de A est décidable ?
- l'union de A et B est décidable ?
- l'intersection de A et B est décidable ?

Soient A et B deux ensembles récursivement énumérables quelconques, est-on sûr que :
- le complémentaire de A est r.e. ?
- l'union de A et B est r.e. ?
- l'intersection de A et B est r.e. ?

6- On considère un langage infini L récursivement énumérable, il existe donc un énumérateur (infini) E qui liste tous les mots de L (par ordre lexicographique). Soit $L' \subseteq L$ le langage défini comme suit $L' = \{w \in L \mid E$ n'écrit aucun mot plus long que w avant d'avoir écrit $w\}$, quel est la nature de L' ? Montrez ce résultat.

7- Soit le langage $L = \{$*(M,w) | pour w, la MT M passe par tous ses états*$\}$, montrer par réduction du problème de l'arrêt que L est indécidable.