TD6

Calculabilité et complexité

Correction

1- Montrer que la relation $\leq_P$ est une relation transitive sur les langages.

Correction Soit $L_1 \leq_P L_2$ et $L_2 \leq_P L_3$, alors il existe des fonctions de réductions calculables polynomialement f_1 et f_2 telles que :
$x \in L_1 \Leftrightarrow f_1(x) \in L_2$
$x \in L_2 \Leftrightarrow f_2(x) \in L_3$

La fonction $f_2(f_1(x))$ est calculable polynomialement et satisfait $x \in L_1 \Leftrightarrow f_2(f_1(x)) \in L_3$.

2- Montrer que $L \leq_P \overline{L}$ si et seulement si $\overline{L} \leq_P L$.

Correction Si $L \leq_P \overline{L}$ et f est la fonction de réduction alors nous avons par définition $x \in L \Leftrightarrow f(x) \in \overline{L}$. Cela signifie que $x \notin L \Leftrightarrow f(x) \notin \overline{L}$, autrement dit $x \in \overline{L} \Leftrightarrow f(x) \in L$ c'est-à-dire $\overline{L} \leq_P L$.

3- Montrer par réduction polynomiale que le problème TSP du voyageur de commerce (*Traveling Salesman Path*) est au moins aussi difficile que la recherche d'un cycle hamiltonien(CYCLE-HAM). En déduire la complexité de ce problème.
On précise que le langage pour le problème de décision correspondant à TSP est :

$$LTSP = \{(G, c, k) \mid \begin{array}{l} G = (S, A) \text{ est un graphe complet} \\ c \text{ est une fonction de } S \times S \rightarrow \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z} \\ G \text{ contient un cycle hamiltonien de coût au plus égal à k}\} \end{array}$$

Correction On remarque d'abord que le problème appartient à NP, étant donné un certificat (une solution supposée) on teste en temps polynomial qu'il appartient à LTSP.

Si on trouve une réduction du pb du cycle hamiltonien en TSP, alors TSP est NP-complet car CYCLE-HAM l'est.
On note tout d'abord qu'un cycle hamiltonien correspond, comme le voyageur de commerce, à la visite de chaque sommet une seule fois.
Pour réaliser la réduction, il faut montrer que tout problème de CYCLE-HAM peut être "transformé" (selon une méthode de complexité polynomiale) en un problème de LTSP. Il s'agit donc de "bricoler" un graphe hamiltonien en un élément de LTSP.

Soit $G = (S, A)$ une instance CYCLE-HAM. On construit une instance de LTSP comme suit. On forme le graphe complet $G' = (S, A')$, $A' = \{(i, j) \mid i, j \in S\}$, et on définit la fonction de coût c par

$$c(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } (i, j) \in A \\ 1 & \text{si } (i, j) \notin A \end{cases}$$

L'instance de LTSP est alors $(G', c, 0)$, qui peut être facilement formée en temps polynomial. Montrons ensuite que G possède un cycle hamiltonien ssi G' possède une tournée de coût égale à 0. G possède un cycle hamiltonien h. Chaque arête de h appartient à A et a donc un coût nul dans G'. Donc, h est une tournée de G' de coût nul. Réciproquement, on suppose que le graphe G' possède une tournée h' de coût au plus égal à 0. Puisque le coût des arêtes de A' valent 0 et 1, le coût de la tournée h' est exactement 0. Donc, h' contient uniquement les arêtes de A. On en conclut que h est un cycle hamiltonien du graphe G.

Comme CYCLE-HAM est NP-complet, TSP l'est également.