Université Louis Pasteur — 8 juin 2006
UFR de Mathématiques et d'Informatique — **L3 informatique fondamentale**

Examen de théorie des langages et calculabilité

Durée : 2h00
Tous documents autorisés. Appareils électroniques non autorisés.
Les exercices sont donnés dans l'ordre du cours mais sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

1 – automates à pile

Soit le langage $L = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$.
Montrez que le complémentaire de L peut être accepté par un automate à pile.

2 – machines de Turing

On s'intéresse ici aux opérations arithmétiques simples sur des nombres entiers positifs représentés en notation décimale. Pour la construction des machines, vous pourrez utiliser autant de machines intermédiaires que nécessaires, à condition de les décrire précisément. Vous pourrez par exemple effectuer des changements de base, mais ça n'est pas une obligation. Chaque machine construite pourra servir à la construction des suivantes.

Soient m et n deux nombres entiers positifs représentés en décimal. Ces deux nombres sont placés sur le ruban d'entrée, l'un à la suite de l'autre, séparés par un #.

a) Construisez la machine de Turing M_1 qui calcule la somme de m et n.
b) Construisez la machine de Turing M_2 qui calcule le produit de m par n.
c) Construisez la machine de Turing M_3 qui calcule m élevé à la puissance n.
d) Construisez la machine de Turing M_4 qui calcule la division entière de m par n.
e) Construisez la machine de Turing M_5 qui calcule le reste de la division entière de m par n.
f) Construisez la machine de Turing M_6 qui calcule la différence de m et n. Si $n > m$, le résultat sera toujours nul.

3 – décidabilité – indécidabilité

Soit le problème suivant :

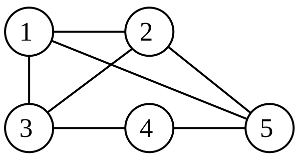
> Etant donné une machine de Turing M, déterminer s'il existe un mot w tel que M passe par tous ses états pendant le calcul de w.

Ce problème est-il décidable ? Prouvez votre réponse.

4 – complexité

Soit G = (V, E) un graphe non orienté. Un sous-ensemble de k sommets $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de V ($k \leq |V|$) tel que toutes les arêtes (v_i, v_j) ($1 \leq i < j \leq k$) appartiennent à G est appelé *clique de taille k* de G.

Prenons par exemple le graphe :



Ce graphe contient :

- 7 cliques de taille 2 (tous les couples de sommets reliés par une arête),
- deux cliques de taille 3 (les triplets {1, 2, 3} et {1, 2, 5}),
- aucune clique de taille 4 ou 5.

Le problème CLIQUE est le suivant :

> Etant donnés un graphe G = (V, E) et un entier $k \leq |V|$, est-ce qu'il existe une clique de taille k dans G ?

a) Montrez que CLIQUE appartient à la classe NP.
b) Montrez que CLIQUE est NP-complet. Vous pourrez pour cela déterminer une réduction polynomiale entre 3-SAT et CLIQUE. Les problèmes NP-complets vus en cours pourront être considérés comme ayant été démontrés NP-complets.