UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Département d'Informatique
LICENCE 3ème année
Examen de Théorie des langages
Mercredi 14 décembre 2011

Les notes de cours et des travaux dirigés sont autorisées.

Rappels, définitions et notations :

- Soit $a_1, a_2, ..., a_k$ une suite d'entiers strictement positifs. Le **p**lus **p**etit **c**ommun **m**ultiple de $a_1, a_2, ..., a_k$, noté $ppcm(a_1, a_2, ..., a_k)$, est le plus petit entier strictement positif divisible à la fois par a_1, a_2, ... et a_k. Par exemple : $ppmc(2, 6, 15) = 30$.

- Un langage $L \subseteq \{0\}^*$ est dit associé à une suite arithmétique s'il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que
$$L = (0^a)^*0^b = \{0^{an+b} \mid n \geq 0\}.$$
Remarque : $L = \{0^b\}$ est associé à une suite arithmétique (i.e. $a = 0$).

- Soit $m = l_1l_2...l_{k-1}l_k$ un mot sur un alphabet $\mathcal{A}$ où $l_i \in \mathcal{A}$ pour $1 \leq i \leq k$. $m^R = l_kl_{k-1}...l_2l_1$.

- **Lemme de l'étoile :** Soit L un langage régulier sur un alphabet $\mathcal{A}$. Alors il exite une bourne $B(L)$ telle que si $m \in L$ et $|m| > B(L)$, alors il existe $x, y, z \in \mathcal{A}^*$ tels que : $m = xyz$, $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leq B(L)$ et $xy^iz \in L$ pour tout $i \geq 0$.

- **Lemme de la double étoile :** Soit L un langage algébrique sur un alphabet $\mathcal{A}$. Alors il exite une bourne $B'(L)$ telle que si $m \in L$ et $|m| > B'(L)$, alors il existe $x, y, z, u, v \in \mathcal{A}^*$ tels que : $m = uvxyz$, $vy \neq \varepsilon$ et $uv^ixy^iz \in L$ pour tout $i \geq 0$.

I. Vrai/Faux

Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse en justifiant vos réponses :

1. Si L est un langage algébrique, alors $L^R = \{m^R \ : \ m \in L\}$ est un langage algébrique.

2. Soit $\mathcal{A}$ un alphabet. Si L_1 est un langage algébrique et L_2 est un langage régulier sur $\mathcal{A}$, alors $L_1 \cap (\mathcal{A}^* \setminus L_2)$ est un langage algébrique.

3. Tout langage fini sur un alphabet $\mathcal{A}$ est nécessairement un langage régulier.

4. $\{0^m1^n \mid m \geq 0$ et $n \geq 0$ et n n'est pas un nombre premier$\}$ est un langage régulier.

5. $\{0^{m^3}1^n \mid m \geq 0$ et $n \geq 0\}$ est un langage algébrique.

6. Le complémentaire d'un langage algébrique sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a\}$ est un langage algébrique!

II. Langages réguliers et algébriques

Le but de cet exercice est de caractériser les langages régulier sur un alphabet constitué d'une seule lettre, et de montrer aussi que sur cet alphabet, tout langage algébrique est nécessairement un langage régulier.

1. Montrez que si un langage $L \subseteq \{0\}^*$ est associé à une suite arithmétique, alors il est régulier.

2. Montrez que si L est une union finie de langages associés à des suite arithmétiques, alors L est langage régulier.

3. Donnez un automate non-déterministe, puis un automate détreministe, puis un automate minimal reconnaissant le langage
$$L = \{0^{2n+3} \mid n \geq 0\} \cup \{0^{6n+3} \mid n \geq 0\}.$$

4. Soient a un entier strictement positif et b un entier tel que $0 \leq b < a$. Donnez l'expression régulière décrivant le complémentaire du langage $\{0^{an+b} \mid n \geq 0\}$.
Indication : Considérez les entiers modulo a.

5. Soient $L \subseteq \{0\}^*$ un langage régulier et $B(L)$ la bourne associé à L par le lemme de l'étoile. Posons $C(L) = ppcm(1, 2, 3, ..., B(L) - 1, B(L))$.

   (a) Montrez que pour tout $m \in L$, si $|m| > B(L)$, alors $m(0^{C(L)})^* \subseteq L$.

   (b) Posons $L_i = 0^{B(L)+i}(0^{C(L)})^* \cap L$ pour $1 \leq i \leq C(L)$. Montrez que pour tout $m \in L$, si $|m| > B(L)$, alors il existe i tel que $m \in w_i(0^{C(L)})^*$ où w_i est le mot de taille minimale de L_i.
   Indication : Soit $m = 0^h \in L$ tel que $h \geq B(L) + 1$. Alors $h - (B(L) + 1) = qC(L) + r$ où q *(respectivement r)* est le quotient *(respectivement le reste)* de la division euclidienne de $h - (B(L) + 1)$ par $C(L)$ et par conséquent, $q \geq 0$ et $0 \leq r \leq C(L) - 1$.

   (c) Montrer que $Card(L \setminus (\bigcup_{1 \leq i \leq C(L)} L_i)) \leq B(L)$.

   (d) Déduire de ce qui précède que tout langage régulier $L \subseteq \{0\}^*$ est une union finie de langages associés à des suites arithmétiques.

6. Soient $L \subseteq \{0\}^*$ un langage algébrique et $B'(L)$ la bourne associé à L par le lemme de la double étoile. Posons $C'(L) = ppcm(1, 2, 3, ..., B'(L) - 1, B'(L))$.

   (a) Montrez que pour tout $m \in L$, si $|m| > B'(L)$, alors
   $m(0^{C'(L)})^* \subseteq L$.

   (b) Posons $L_i = 0^{B'(L)+i}(0^{C'(L)})^* \cap L$ pour $1 \leq i \leq C'(L)$. Montrez que pour tout $m \in L$, si $|m| > B'(L)$, alors il existe i tel que $m \in w_i(0^{C'(L)})^*$ où w_i est le mot de taille minimale de L_i.

   (c) Montrer que $Card(L \setminus (\bigcup_{1 \leq i \leq C'(L)} L_i)) \leq B'(L)$.

   (d) Déduire de ce qui précède que tout langage algébrique $L \subseteq \{0\}^*$ est nécessairement un langage régulier.