Université de Strasbourg *M1 ISI/ILC*
UFR Mathématique et Informatique *année 20010/11*

Calculabilité et complexité

Contrôle terminal - rattrapage

Les exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : une variante des machines de Turing (*10 points*)

Définition. On considère un alphabet Σ contenant les symboles $\triangleright$ et $\sqcup$, mais ni le symbole $\rightarrow$ ni le symbole $\leftarrow$. On définit une *T-machine* par le quintuplet $(\Sigma, K, \delta, s, H)$ où K, s et H sont respectivement un ensemble d'états, un état de départ et un ensemble d'états d'arrêt comme pour une machine de Turing standard. $\delta : K \times \Sigma \rightarrow K \times (\Sigma \setminus \{\triangleright\} \cup) \times \{\rightarrow, \leftarrow\}$ est une fonction de transition qui à un couple (q, α) associe un triplet (p, β, f) où p est un nouvel état, β une lettre de $\Sigma \setminus \{\triangleright\}$ et f une flèche indiquant un déplacement soit à droite ($\rightarrow$) soit à gauche ($\leftarrow$) avec les signification habituelle des machines de Turing. Autrement dit, une T-machine est une variante des machines de Turing telles que nous les avons vues en cours pour lesquelles, à chaque transition, on écrit une lettre *et* on déplace la tête de lecture/écriture.

1- Donnez pour une T-machine les définitions correspondant à configuration, pas de calcul et calcul. Par analogie avec les machines de Turing, on appelle langage T-décidable un langage reconnu par une T-machine : donnez une définition précise de cette notion. Même chose pour la notion de fonction T-calculable.

2- Étant donnée une T-machine M, montrez de manière constructive qu'il existe une machine de Turing M' équivalente à M dans un sens que vous préciserez. Vous montrerez précisément comment on construit la machine M' à partir de la machine M. Déduisez-en que les langages T-décidables sont récursifs. Inversement, montrez que tout langage récursif est T-décidable.

On appelle RT-machine une T-machine où le seul déplacement possible de la tête de lecture/écriture est vers la droite. On dit que $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ est une fonction RT-calculable si il existe une RT-machine qui la calcule.

3- Montrez que si f est une fonction récursive et L est un langage récursif, il n'est en général pas vrai que $f(L)$ soit récursif.

En revanche, montrez que si L est un langage récursif et f est une fonction RT-calculable alors le langage $f(L)$ est récursif.

Exercice 2 : indécidabilité (*10 points*)

1- On définit la fonction β de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ comme suit : pour tout entier n, $\beta(n)$ est le plus grand entier m tel qu'il existe une machine de Turing avec exactement n états qui s'arrête en partant d'un ruban vide en produisant la configuration $(h, \triangleright\underline{\sqcup}I^m)$.

a) Montrez que $\beta(n+3) > \beta(n)$.

b) Montrez que si f est une fonction numérique récursive de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ calculée en unaire par une machine de Turing M_f avec k_f états, on a $\beta(2n + 1 + k_f) \geqslant f(n)$.

c) Montrez que la fonction β n'est pas récursive (vous pourrez utiliser la question précédente en considérant la fonction f telle que $f(n) = \beta(3n)$)

2- On dit qu'une machine de Turing $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ a un comportement spatial (k,l)-affine avec le mot w en entrée si et seulement si pour toute configuration $(q, \triangleright u\underline{\sigma}v)$ telle que $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^* (q, \triangleright u\underline{\sigma}v)$ on a $|u\sigma v| \leqslant k|w| + l$.

On dit qu'une machine de Turing a un comportement spatial affine avec le mot w en entrée si et seulement si, il existe deux entiers k et l tels que M a un comportement spatial (k,l)-affine avec le mot w en entrée.

a) Montrez que le problème suivant est décidable :
Étant donnés, une machine de Turing M, un mot w et deux entiers k et l, est-ce que M a un comportement spatial (k,l)-affine avec le mot w en entrée ?

b) Montrez que le problème suivant est indécidable :
Étant donnés une Machine de Turing M et un mot w, est-ce que M a un comportement spatial affine avec le mot w en entrée ?