Université de Strasbourg *M1 ISI/ILC*
UFR de Mathématique et d'Informatique *année 2010/11*

Calculabilité et complexité

Contrôle continu

Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (*10 points*)

Dans cet exercice, on considère l'alphabet $\Sigma_0 = \{a\}$ qu'on complétera éventuellement par des symboles de contrôle (par exemple \$, €, *etc.*) pour obtenir un alphabet Σ, et des machines de Turing sur cet alphabet.

1- On considère des configurations où le ruban est de la forme $\rhd \sqcup aa \ldots a\$a \ldots a\$a \ldots a \sqcup \sqcup \ldots$ (*i.e* il contient un mot de la forme $u\$v\$w$ où u, v et $w \in a^*$).
Définissez une machine de Turing de nom T qui "transfère" un a du premier mot vers le deuxième. Par exemple,

- avec la configuration $(s, \rhd\underline{\sqcup}aaa\$aa\$aaaa)$, T produit la configuration $(h, \rhd\underline{\sqcup}aa\$aaa\$aaaa)$;
- et avec la configuration $(s, \rhd\underline{\sqcup}\$aa\$aaaa)$ T produit la configuration $(h, \rhd \sqcup \underline{\$}aa\$aaaa)$

2- Avec les configurations de la question précédente, définissez une machine de Turing de nom D, qui recopie *2 fois* le mot v à la suite du mot w. Par exemple,

- avec la configuration $(s, \rhd\underline{\sqcup}aaa\$aa\$aaa)$, D produit la configuration $(h, \rhd\underline{\sqcup}aaa\$aa\$aaaaaaa)$;
- et avec la configuration $(s, \rhd\underline{\sqcup}a\$\$aaaa)$ D produit la configuration $(h, \rhd\underline{\sqcup}a\$\$aaaa)$

3- Appliquer successivement sur la configuration initiale $(s, \rhd\underline{\sqcup}aaa\$\$)$, la machine T, puis la machine D, puis la machine T, puis la machine D. Quelle configuration obtenez-vous ? Combien compte-elle de a ? Montrez que la suite u définie par la récurence $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$, vérifie $u_n = n^2$.

4- Utilisez les questions précédentes pour concevoir une machine de Turing qui calcule la fonction $f : a^* \to a^*$ telle que $f(a^n) = a^{n^2}$.

5 Définissez une machine de Turing, éventuellement à plusieurs rubans, qui décide langage $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 2 : stabilité et grammaires (*10 points*)

1- On considère la classe des langages engendrés par les grammaires générales. Montrez que cette classe est stable par réunion, par concaténation et par fermeture de Kleene (opération *). Montrez aussi qu'elle est stable par intersection.

2- Soit Σ_0 un alphabet, on considère une fonction récursive $f : \Sigma_0 \to \Sigma_0$ et $L \subset \Sigma_0^*$ un langage engendré par une grammaire générale. On pose $f(L) = \{f(w) \mid w \in L\}$, montrez que $f(L)$ est engendré par une grammaire générale.

3- Avec les notations de la question précédente, on note $f^*(L) = \{v \in \Sigma_0^* \mid \exists n \in \mathbb{N} \wedge w \in L, v = f^n(w)\}$. Montrez que si f est récursive et L est engendrée par une grammaire générale, alors $f^*(L)$ est engendrée par une grammaire générale.

4- Écrivez une grammaire qui engendre le langage des mots comportant autant de 'a', que de 'b' et que de 'c'.

5- On considère un langage $L \subset \Sigma_0^*$, on appelle $A(L)$ le langage des anagrammes de L défini par $A(L) = \{v \in \Sigma_0^* | v = \alpha_1 \ldots \alpha_k \wedge \exists w \in L, w = \alpha_{\sigma(1)} \ldots \alpha_{\sigma(k)}$ avec σ une permutation de $\{1, \ldots, k\}\}$. Montrez que si L est engendré par une grammaire générale, alors $A(L)$ aussi.