

# TD5

## Indécidabilité

### 1 Usage du ruban

On dit qu'une machine de Turing  $M$  utilise  $k$  positions de ruban ( $k$  cases) avec  $w$  en entrée si et seulement si il existe une configuration  $(q, u\underline{a}v)$  de  $M$  telle que  $|uav| \geq k$  et  $(s, \triangleright \sqcup w) \vdash_M^* (q, u\underline{a}v)$ .

**a-** Montrez que le problème suivant est décidable : étant donné une machine de Turing  $M$ , un mot  $w$  et un entier  $k$ , est-ce que  $M$  utilise  $k$  cases avec l'entrée  $w$  ?

**b-** Soit  $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  une fonction récursive, montrez que le problème suivant est décidable : "Étant donné une machine de Turing  $M$  et un mot  $w$ , est-ce que  $M$  utilise  $f(|w|)$  cases avec  $w$  en entrée ?"

**c-** Montrez que le problème suivant est indécidable : étant donné une machine de Turing  $M$  et un mot  $w$ , est-ce qu'il existe un entier  $k \geq 0$  telle que  $M$  n'utilise pas  $k$  case avec l'entrée  $w$  ?

### 2 Problèmes

Indiquez si les problèmes suivants sont décidables ou indécidables. Justifiez soigneusement votre réponse.

**a-** Étant donné une machine de Turing  $M$ , un état  $q$  et un mot  $w$ , est-ce que  $M$  passe par l'état  $q$  avec  $w$  en entrée ?

**b-** Étant donné une machine de Turing  $M$  et deux états  $p$  et  $q$ , est-ce que toute configuration avec l'état  $p$  produit en un nombre fini d'étapes une configuration avec l'état  $q$  ?

**c-** Étant donné une machine de Turing  $M$  et une lettre  $a$ , est-ce que  $M$  avec le mot vide en entrée écrit un jour sur le ruban la lettre  $a$  ?

**d-** Étant donné une machine de Turing  $M$ , est-ce que  $M$  avec le mot vide en entrée écrit un jour un symbole différent de l'espace ?