TD2 : Machines de Turing (suite)

1 Machines de Turing et calculs

1- Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$, construisez une machine de Turing calculant la fonction $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ qui à tout mot w associe le mot w' qui est le "projeté" de w sur $\{b, c\}$ (c'est-à-dire le mot issu de w après gommage de la lettre a).

2- Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$, construisez une machine de Turing calculant la fonction $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ qui à tout mot w associe le mot ww^R.

3- Construisez une machine de Turing qui calcule la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(x) = x - 1$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

4- Construisez une machine de Turing qui décide le langage L dans les cas suivants :
- $L = a^*ba^*b$
- $L = \{w \in \{a, b, c\}^* | w \text{ contient } abc \text{ mais pas } bb\}$
- $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$
- $L = \{ww | w \in \{a, b\}^*\}$

2 Composition de machines de Turing

1- Construisez une machine de Turing sous forme de combinaison de machines de Turing élémentaires qui fasse la soustraction de deux entiers écrits en notation unaire. Plus précisément, cette machine calculera la fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n, m) = n - m$ si $m \leq n$ et 0 sinon.

2- Même chose pour la multiplication (en unaire).

3- Écrivez une machine de Turing qui réalise la conversion unaire → binaire.

4- Soit Σ un alphabet, on appelle homomorphisme de monoïdes toute application φ de Σ^* dans Σ^* telle que $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$.

a) Est-ce que la fonction de la question 1.1 est un homorphisme de monoïdes ?
b) Montrez que tout homormorphisme de monoïdes est défini par l'image des lettres de l'alphabet. Donnez des exemples d'homomorphismes de monoïdes.
c) On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ et l'homomorphisme φ tel que $\varphi(a) = e$, $\varphi(b) = ab$ et $\varphi(c) = c$. Construisez une machine de Turing calculant φ.

3 Machine à k ruban

1- On considère une alphabet d'entrée $\Sigma_0 \subset \Sigma$, spécifiez et construisez une machine à k rubans (k étant à déterminer) permettant de calculer n'importe quel homomorphisme de Σ_0^* dans Σ_0^*.

2- Définissez une machine de Turing à deux rubans qui décale n fois un mot sur le ruban 1, n étant un entier écrit sur le deuxième ruban. Vous examinerez les deux situations suivantes :

- n est écrit en unaire,
- n est écrit en binaire.

3- Construisez une machine de Turing à k rubans (k étant un entier que vous déterminerez) calculant l'opération de multiplication sur $\mathbb{N}$. Remarque : on prendra la définition vue en cours, qui impose que les entiers soient codés en binaire et que les opérandes soient séparés par des " ;".

4- Décrivez une machine de Turing à k rubans décidant le langage $L = \{a^p |\ p \text{ est un entier naturel premier}\}$.