Université Louis Pasteur | Session de Juin 2006
UFR de Mathématique et Informatique | **M1 d'Informatique**

Traitement d'Images

Corrigé
Prof. Christian RONSE

(1) Filtre médian hybride

Pour analyser le comportement du filtre médian, on applique le *principe de dichotomie* : on peut choisir un seuil quelconque et répartir les pixels de l'image en deux catégories, les "clairs" (dont le niveau de gris est supérieur ou égal au seuil) et les "sombres" (dont le niveau de gris est strictement inférieur au seuil). Les guillemets indiquent que ces catégories sont relatives, elles dépendent du choix du seuil. Alors le filtre médian rendra un pixel "clair" ou "sombre" selon que, dans l'image de départ, la majorité des pixels dans la fenêtre associée à ce pixel sont "clairs" ou "sombres".

Soit μ le filtre médian à fenêtre 3×3, et η le filtre médian hybride, et soit I l'image de départ. Voyons sous quelles conditions un pixel change de catégorie (de "clair" à "sombre" ou vice-versa) sous l'action d'un de ces filtres. Soit X la catégorie ("clair" ou "sombre") du pixel p dans I, et soit Y la catégorie opposée.

On a $\mu(I)(p)$ de catégorie Y ssi au moins 5 pixels de la fenêtre 3×3 centrée en p sont de catégorie Y dans l'image I ; ces pixels sont nécessairement distincts de p (de catégorie X). Donc $\mu(I)(p)$ est de catégorie Y ssi au moins 5 de ses 8-voisins sont de catégorie Y dans I.

Comme $\eta(I)(p) = \text{med}\{I(p), \mu_A(I)(p), \mu_B(I)(p)\}$, pour que $\eta(I)(p)$ soit de catégorie Y, il faut qu'au moins deux parmi $I(p)$, $\mu_A(I)(p)$ et $\mu_B(I)(p)$ soient de catégorie Y ; mais $I(p)$ est de catégorie X, la condition est donc que $\mu_A(I)(p)$ et $\mu_B(I)(p)$ soient tous deux de catégorie Y. Par conséquent il faut que dans chacune des fenêtres A_p et B_p, au moins 3 parmi les 5 pixels soient de catégorie Y ; mais ces pixels doivent être distincts de p (de catégorie X). Donc $\eta(I)(p)$ est de catégorie Y ssi au moins 3 de ses 4 voisins axiaux et 3 de ses 4 voisins diagonaux sont de catégorie Y dans I.

On voit ainsi que la condition pour que η fasse changer la catégorie d'un pixel (avoir au moins 3 voisins axiaux et 3 voisins diagonaux de catégorie opposée) est plus restrictive que celle pour que μ fasse changer la catégorie de ce pixel (avoir au moins 5 voisins de catégorie opposée). Donc η modifie moins l'image que μ, on dit que η *est moins actif* que μ. En tout pixel p on aura :

— si $\eta(I)(p) < I(p)$, alors $\mu(I)(p) \leq \eta(I)(p)$;
— si $\eta(I)(p) > I(p)$, alors $\mu(I)(p) \geq \eta(I)(p)$.

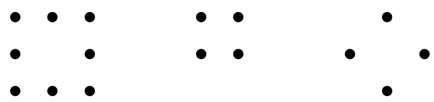
Voyons maintenant les 3 points spécifiquement mentionés dans l'énoncé :

Elimination du bruit poivre et sel :

D'une manière générale, le filtre η étant constitué à partir du filtre médian, il va dans une certaine mesure éliminer le bruit poivre et sel. Comme η est moins actif que μ, cela signifie qu'un pixel :

— bruité a plus de chances de rester bruité avec le filtre η qu'avec le filtre μ ;
— non bruité a moins de chances de devenir bruité avec le filtre η qu'avec le filtre μ.

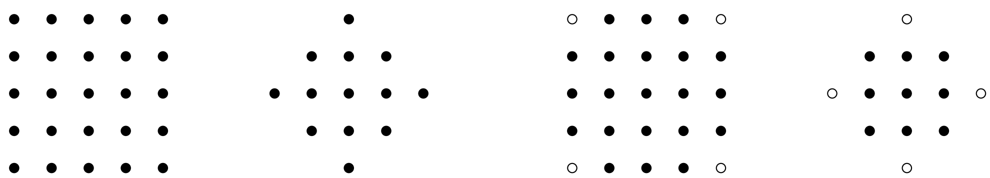
On pourrait penser qu'en répétant l'application de η on obtiendrait un taux d'élimination de bruit impulsif comparable à celui de μ, mais on remarquera qu'il y a certaines configurations de pixels préservées par η, mais éliminées par μ (en un ou deux passages du filtre) :



Cela signifie que si sur une telle configuration on a tous les pixels bruités “sel”, ils resteront “sel” après application de η, alors que μ aurait éliminé une telle configuration “sel” si les pixels avoisinants n’étaient pas “sel” (par deux applications du filtre pour le première configuration, mais une application pour les deux autres). Idem pour “poivre”.

Préservation des arêtes rectilignes de type “marche” :
Comme μ préserve les marches rectilignes, le filtre moins actif η les préservera aussi. Sinon on peut remarquer que si un pixel p se trouve d’un côté d’une arête rectiligne, alors ses deux voisins verticaux ne peuvent pas être tous deux du côté opposé (sinon p, au milieu des deux, serait aussi du côté opposé), et de même pour les deux voisins horizontaux, les deux selon la diagonale descendante, et les deux selon la diagonale montante. Donc p aura au moins 2 pixels axiaux et 2 pixels diagonaux du même côté de l’arête. Comme chaque côté de l’arête correspond à une catégorie “clair” ou “sombre”, dans A_p et B_p on aura au moins 3 pixels de même catégorie que p, ce qui implique que $\mu_A(I)(p)$ et $\mu_B(I)(p)$ seront de même catégorie que $I(p)$, et ainsi $\eta(I)(p)$ sera aussi de même catégorie.

Préservation des coins de rectangles et de losanges :
Supposons un rectangle ou un losange dont les pixels sont d’une catégorie, les pixels autour de celui-ci étant de catégorie opposée. Alors η préserve un tel rectangle ou losange, tandis que μ enlève les 4 pixels formant ses coins :



Ici $\circ$ désigne un pixel enlevé par μ. En effet, un pixel du coin n’a que 3 de ses 8-voisins dans le rectangle ou le losange, tandis que tout autre pixel y a au moins 5 de ses 8-voisins, donc μ enlève les coins (change leur catégorie). Par contre dans le rectangle, tout pixel p a au moins 2 voisins axiaux dans le rectangle, donc $\mu_A(I)(p)$ sera de même catégorie que $I(p)$; de même dans le losange, tout pixel p a au moins 2 voisins diagonaux dans le losange, donc $\mu_B(I)(p)$ sera de même catégorie que $I(p)$; ainsi chaque pixel restera de même catégorie.

(2) Histogramme et égalisation

On vérifie que pour $g = 64$, $2g = 128 = 64 + g$, tandis que pour $g = 127$, $64 + g = 191 = (255 + g)/2$, et finalement pour $g = 255$, $(255 + g)/2 = 255$. Ainsi f est linéaire par morceaux, de pente 2 entre 0 et 64, de pente 1 entre 64 et 127, et de pente 1/2 entre 127 et 255.

Selon les formules de cours, on a $f(g) = 255\, C(g)/n$, où C est l’histogramme cumulatif donné par $C(0) = H(0)$ et $C(g) = C(g-1) + H(g)$ pour $g > 0$. Donc

$$H(0) = C(0) = \frac{nf(0)}{255} = 0 \ ,$$

tangis que pour $g > 0$ on a

$$H(g) = C(g) - C(g-1) = \frac{n\big[f(g) - f(g-1)\big]}{255} = \begin{cases} \frac{2n}{255} & \text{pour } 1 \leq g \leq 64 \ ; \\ \frac{n}{255} & \text{pour } 65 \leq g \leq 127 \ ; \\ \frac{n}{2\times 255} & \text{pour } 128 \leq g \leq 255 \ . \end{cases}$$

En résumé,

$$H(g) = \frac{n}{255} \times \begin{cases} 0 & \text{pour } g = 0 \ ; \\ 2 & \text{pour } 1 \leq g \leq 64 \ ; \\ 1 & \text{pour } 65 \leq g \leq 127 \ ; \\ \frac{1}{2} & \text{pour } 128 \leq g \leq 255 \ . \end{cases}$$

Le total donne bien $(n/255) \times \big[0 \times 1 + 2 \times 64 + 1 \times 63 + (1/2) \times 128\big] = n$ pixels.

Nous laissons au lecteur le soin de dessiner les graphiques de f et H...

(3) Masque de corrélation/convolution

Soient a_0 le coefficient central du masque, et $a_1, \ldots, a_8$ les 8 autres coefficients. De même, soit g_0 le niveau de gris du pixel de référence, et $g_1, \ldots, g_8$ ceux de ses 8 voisins, dans l'image de départ. Donc dans l'image filtrée, le pixel de référence aura le niveau de gris $a_0 g_0 + a_1 g_1 + \cdots + a_8 g_8$. Les conditions de l'énoncé donnent :

(i) Si $g_0 = g_1 = \ldots = g_8 = c$, alors $a_0 g_0 + a_1 g_1 + \cdots + a_8 g_8 = c$. Cela donne $a_0 + a_1 + \cdots + a_8 = 1$.

(ii) Si $g_0 = h + (g_1 + \cdots + g_8)/8$, alors $a_0 g_0 + a_1 g_1 + \cdots + a_8 g_8 = g_0 - 2h$.

(iii) Si $g_0 = -h + (g_1 + \cdots + g_8)/8$, alors $a_0 g_0 + a_1 g_1 + \cdots + a_8 g_8 = g_0 + 2h$.

En fait, les deux conditions (ii) et (iii) sont équivalentes (il suffit de changer h en $-h$), et l'élimination de h donne dans les deux cas la même chose :

$$a_0 g_0 + a_1 g_1 + \cdots + a_8 g_8 = g_0 - 2\left(g_0 - \frac{g_1 + \cdots + g_8}{8}\right) = -g_0 + \frac{g_1 + \cdots + g_8}{4} \quad ,$$

c.-à-d.

$$(a_0 + 1) g_0 + (a_1 - 1/4) g_1 + \cdots + (a_8 - 1/4) g_8 \ .$$

Cette équation doit être vérifiée quelles que soient les valeurs $g_0, g_1, \ldots, g_8$, donc les coefficients de celles-ci sont tous nuls, et l'unique solution est

$$a_0 = -1, \quad a_1 = \ldots = a_8 = 1/4 \ .$$

On a donc un masque 3×3 avec la valeur -1 au centre, et les valeurs $1/4$ autour :

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

On vérifie que ce masque satisfait les conditions (i), (ii) et (iii). Les conditions (ii) et(iii) s'expriment comme suit :

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1/8 & -1/8 & -1/8 \\ -1/8 & 1 & -1/8 \\ -1/8 & -1/8 & -1/8 \end{bmatrix} \quad ,$$

à savoir que le filtre a pour effet soustraire du niveau de gris d'un pixel 2 fois la différence entre ce niveau de gris et la moyenne des niveaux de gris de ses 8 voisins. On notera que la condition (i) est redondante (elle est un cas particulier de $h = 0$ dans (ii) ou (iii)).