Université Louis Pasteur
Département d'Informatique

Session de Juin 2000

LICENCE ET MAÎTRISE D'INFORMATIQUE

Traitement d'Images

Corrigé

par : Prof. Christian RONSE

(1) Ouverture d'aire *(10 points)*

γ_n conserve entièrement les composantes 8-connexes dont la taille est $\geq n$, mais efface complètement celles dont la taille est $< n$.

(a) *(1,5 point)* Les composantes 8-connexes de $\gamma_n(X)$ sont exactement les composantes 8-connexes de X dont la taille est $\geq n$.

Soit A une composante 8-connexe de $\gamma_n(X)$. Comme A est une partie 8-connexe de X, il y a une composante 8-connexe B de X contenant A. Si on avait $|B| < n$, alors γ_n effacerait B de X, donc B (et a fortiori A) serait hors de X. Donc $|B| \geq n$, et γ_n conserve entièrement B, c.à.d. $B \subseteq \gamma_n(X)$. Comme B est 8-connexe, mais que A est maximale en tant que partie 8-connexe de $\gamma_n(X)$, on en déduit que $B = A$, et ainsi A est une composante 8-connexe de X de taille $\geq n$.

Soit B une composante 8-connexe de X de taille $\geq n$. Alors γ_n conserve entièrement B, c.à.d. $B \subseteq \gamma_n(X)$. Comme B est 8-connexe, il y a une composante 8-connexe A de $\gamma_n(X)$ contenant B. Mais alors $B \subseteq A \subseteq \gamma_n(X) \subseteq X$, et comme B est maximale en tant que partie 8-connexe de X, on en déduit que $B = A$, et ainsi B est une composante 8-connexe de $\gamma_n(X)$.

On a donc montré qu'un ensemble est une composante 8-connexe de $\gamma_n(X)$ ssi il est une composante 8-connexe de X de taille $\geq n$.

(b) *(1 point)* $\gamma_n(X)$ décroît avec n, en d'autres termes $\gamma_m(X) \subseteq \gamma_n(X)$ pour $m > n$. En effet, $\gamma_m(X)$ comprend les composantes 8-connexes de X dont la taille est $\geq m$, donc cette taille est $\geq n$, et ces composantes sont donc incluses dans $\gamma_n(X)$.

(c) *(2 points)* On sait par **(a)** que les composantes 8-connexes de $\gamma_n(X)$ sont exactement les composantes 8-connexes de X dont la taille est $\geq n$. En particulier, toute composante 8-connexe de $\gamma_n(X)$ est de taille $\geq n$.

Pour $m \leq n$, $\gamma_m\big(\gamma_n(X)\big)$ comprendra donc toutes les composantes 8-connexes de $\gamma_n(X)$ dont la taille est $\geq m$, mais comme elles sont toutes de taille $\geq n \geq m$, ce seront toutes les composantes 8-connexes de $\gamma_n(X)$, donc $\gamma_m\big(\gamma_n(X)\big) = \gamma_n(X)$.

Pour $m > n$, $\gamma_m\big(\gamma_n(X)\big)$ comprendra donc toutes les composantes 8-connexes de $\gamma_n(X)$ dont la taille est $\geq m$, ce qui veut dire que parmi toutes les composantes 8-connexes de X de taille $\geq n$, on ne garde que celles de taille $\geq m$. Donc $\gamma_m\big(\gamma_n(X)\big)$ comprend toutes les composantes 8-connexes de X dont la taille est $\geq m$, et ainsi $\gamma_m\big(\gamma_n(X)\big) = \gamma_m(X)$.

En résumé,

$$\gamma_m\big(\gamma_n(X)\big) = \gamma_{\max(m,n)}(X) \quad . \qquad (\heartsuit)$$

(d) *(3 points)* On considère l'opérateur $\psi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) : X \mapsto X \cap (X \oplus V)$, où V l'élément structurant formé des 8 voisins de l'origine o (mais ne contenant pas o) :

$$\begin{array}{ccc}\bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & o & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet\end{array}$$

Comme $\psi(X) = X \cap (X \oplus V)$, ψ ne peut pas rajouter des points à un ensemble, il ne peut qu'en enlever. Pour $p \in \mathbb{Z}^2$ et $X \subseteq \mathbb{Z}^2$, on a $p \in \psi(X)$ ssi $p \in X$ et $p \in X \oplus V$, et comme $X \oplus V$ est l'union des V_q pour $q \in X$, cela signifie que $p \in X$ et $p \in V_q$ pour un certain $q \in X$. Par définition, V est formé des 8 voisins de l'origine, donc V_q est formé des 8 voisins de q, et $p \in V_q$ signifie simplement que p est 8-adjacent à q. Par conséquent $p \in \psi(X)$ ssi $p \in X$ et il existe un $q \in X$ tel que p est 8-adjacent à q. Donc ψ enlève d'un ensemble les points isolés au sens de la 8-adjacence, c.à.d. tout point de cet ensemble qui n'est pas 8-adjacent à un autre point de cet ensemble.

Comparons le avec γ_2. Si p est un point isolé de X au sens de la 8-adjacence, alors $\{p\}$ est une composante 8-connexe de X, dont la taille est 1, et ainsi γ_2 enlève p de X. Si p est un point non isolé de X au sens de la 8-adjacence, cela signifie que p est 8-adjacent à un autre point q de X ; alors p et q sont dans une même composante 8-connexe de X, dont la taille est bien sûr au moins 2 ; comme γ_2 préserve cette composante connexe, on aura $p \in \gamma_2(X)$.

On voit donc que ψ et γ_2 n'ajoutent pas de points à un ensemble, et qu'ils enlèvent les mêmes points dans cet ensemble. Ainsi $\psi = \gamma_2$.

(e) *(2,5 points)* On considère l'opérateur $\theta : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ qui est l'union des ouvertures par quatre éléments structurants A, B, C, D, c.à.d.

$$\theta(X) = (X \circ A) \cup (X \circ B) \cup (X \circ C) \cup (X \circ D) \quad ,$$

où A, B, C, D sont formés de deux pixels 8-adjacents suivant les 4 directions fondamentales :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet \\ & \\ \multicolumn{2}{c}{A} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ B \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \bullet & \\ & \bullet \\ \multicolumn{2}{c}{C} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \bullet \\ \bullet & \\ \multicolumn{2}{c}{D} \end{array}$$

Soit $X \subseteq \mathbb{Z}^2$. On sait que pour $Y = A, B, C, D$, $X \circ Y$ est l'union des translatés de Y inclus dans X. Donc $\theta(X)$ est l'union des parties Z de X qui sont un translaté de A, B, C ou D. Mais il est clair qu'un ensemble $Z \subseteq \mathbb{Z}^2$ est un translaté de A, B, C ou D ssi Z est une paire de points 8-adjacents. Donc $\theta(X)$ est l'union des paires de points 8-adjacents incluses dans X. En particulier $\theta(X) \subseteq X$.

Soit $p \in X$. Si p est un point isolé de X au sens de la 8-adjacence, alors p n'est pas 8-adjacent à un autre point de X, donc il n'appartient à aucune paire de points 8-adjacents incluse dans X, et ainsi $p \notin \theta(X)$. Si p n'est pas isolé dans X au sens de la 8-adjacence, cela signifie que p est 8-adjacent à un autre point q de X ; alors $\{p, q\}$ est une des paires constituant $\theta(X)$, donc $p \in \{p, q\} \subseteq \theta(X)$.

Par conséquent θ enlève d'un ensemble les points isolés au sens de la 8-adjacence, et conserve les autres ; de plus θ ne peut pas rajouter de points à l'ensemble. On en déduit que $\theta = \psi$.

Remarques. 1°) Les ouvertures d'aire γ_n, ainsi que leur duaux, à savoir les fermetures d'aire φ_n (bouchant les trous dont la taille est inférieure à n) sont utilisées en pratique pour filtrer les images binaires. Ces opérateurs peuvent se généraliser aux images à niveaux de gris.

2°) L'équation ($\heartsuit$) signifie que γ_n est un filtre qui "agit de plus en plus" quand n augmente. En morphologie mathématique, on appelle cela une *granulométrie*. On peut faire une analogie avec un tamis dont les trous seraient de diamètre $n-1$ et ne garderaient que les pierres de diamètre au moins n, et cette équation représenterait ce qui se passe si on verse le contenu gardé par ce tamis dans un deuxième tamis dont les trous seraient de diamètre $m-1$: cela reviendrait au même de ne garder que le tamis aux plus gros trous.

3°) Les étudiantes qui ont fait l'effort d'étudier les annales auront probablement reconnu que l'opérateur ψ ressemble beaucoup à celui de la question 2 de l'examen de janvier 94. Dans le corrigé de celle-ci, il était expliqué que c'était une ouverture algébrique invariante par translations, et on avait fait le lien entre le comportement de ψ et son équation. Cela montre à nouveau que les étudiants devraient tous lire les annales (et jouer avec xv ou gimp).

(2) Rehaussement linéaire *(4 points)*

On veut avoir un masque de convolution tel que la convolution d'une image avec ce masque donne en résultat une valeur de niveau de gris :

(i) nulle dans les zones où le niveau de gris de l'image de départ était constant ;

(ii) élevée en tout pixel qui avait dans l'image de départ un niveau de gris sensiblement supérieur à celui de ses 4 voisins horizontaux et verticaux.

Dans une zone de l'image de départ où le niveau de gris est une constante c, le résultat de la convolution donnera c fois la somme des coefficients du masque de convolution. Donc la condition (i) signifie que la somme des coefficients du masque vaut 0. La condition (ii) indique qu'il faut simplement comparer le niveau de gris d'un pixel avec celui de ses voisins, cela peut se faire par la différence entre le niveau du pixel et et la moyenne de celle de ses 4 voisins axiaux. Ce qui donne le masque suivant, centré en l'origine :

$$\begin{matrix} & -\frac{1}{4} & \\ -\frac{1}{4} & +1 & -\frac{1}{4} \\ & -\frac{1}{4} & \end{matrix}$$

Si on veut travailler en nombre entiers, on peut multiplier les coefficients par 4, obtenant ainsi le masque :

$$\begin{matrix} & -1 & \\ -1 & +4 & -1 \\ & -1 & \end{matrix}$$

Un pixel qui avait dans l'image de départ un niveau de gris sensiblement supérieur à celui de ses 4 voisins horizontaux et verticaux donnera un résultat positif significatif dans la convolution. Par contre si ce pixel avait un niveau de gris sensiblement inférieur à celui de ses 4 voisins, cela donnera un résultat négatif significatif dans la convolution. Pour un pixel ayant dans l'image de départ un niveau de gris sensiblement différent de celui de ses 4 voisins horizontaux et verticaux, cela signifie que ce niveau est sensiblement supérieur ou inférieur à celui de ses 4 voisins. Si on veut faire apparaître en clair un tel pixel, il suffit donc de prendre la valeur absolue de la convolution.

(3) Contrastes *(7 points)*

Considérons le premier cas de figure :

(i) L'image à 256 niveaux de gris provient d'un scanner du cerveau. Le fond (environ 25% de la surface) est noir (niveaux de gris < 15), le crâne (environ 5% de la surface) est clair (niveaux de gris > 200), la masse cérébrale (environ 70% restants de la surface) est gris moyen (niveaux de gris compris entre 120 et 170), sauf les tumeurs (moins de 10% de la surface) qui sont plus claires (niveaux de gris compris entre 150 et 190). Le médecin souhaite mettre ces tumeurs en évidence.

Bien que ce ne soit pas totalement explicite dans l'énoncé, les tumeurs qui intéressent le médecin sont généralement dans le cerveau, et pas dans l'os du crâne... donc les tumeurs font partie des 70% de la surface de l'image correspondant à la masse cérébrale. Examinons les quatre opérations :

(a) Ne rien changer.
Le cerveau est bien contrasté par rapport au fond ; il l'est assez bien par rapport au crâne, sauf peut-être sur les tumeurs voisines du crâne. Le contraste entre les tumeurs et le reste de la masse cérébrale est un peu insuffisant.

(b) Modifier le contraste en appliquant aux niveaux de gris la transformation $g \mapsto g^2/255$ (approximée à l'entier inférieur ou égal).
Cette transformation donne :

$$0 \mapsto 0,\ 15 \mapsto 0,\ 120 \mapsto 56,\ 150 \mapsto 88,\ 170 \mapsto 113,\ 190 \mapsto 141,\ 200 \mapsto 156,\ 255 \mapsto 255.$$

Les hauts niveaux de gris voient leur contraste augmenté. En particulier le contraste au sein du cerveau et entre celui-ci et le crâne sera augmenté. Seul le fond perd son contraste, ce qui ne pose aucun problème. C'est donc globalement positif.

(c) Modifier le contraste en appliquant aux niveaux de gris la transformation $g \mapsto (255g)^{1/2}$ (approximée à l'entier inférieur ou égal).
Cette transformation donne :

$$0 \mapsto 0,\ 15 \mapsto 61,\ 120 \mapsto 174,\ 150 \mapsto 195,\ 170 \mapsto 208,\ 190 \mapsto 220,\ 200 \mapsto 225,\ 255 \mapsto 255.$$

Le contraste sera rehaussé dans le fond (inutile), mais diminué dans le cerveau, ce qui est le contraire de ce qu'il faut faire.

(d) Egaliser l'histogramme des niveaux de gris.
Cette transformation donne :

- Le fond sombre (25% de la surface) occupera à peu près les 25% de niveaux de gris les plus sombres, c.à.d. environ de 0 à 63.
- Le crâne (5% de la surface) occupera à peu près les 5% de niveaux de gris les plus clairs, c.à.d. environ de 242 à 255.
- Le cerveau, y compris les tumeurs, occupera à peu près les 70% de niveaux de gris intermédiaires, c.à.d. environ de 64 à 241.

Le contraste sera rehaussé dans le fond (inutile), et également au sein du cerveau (ce qui est bon pour détecter les tumeurs), mais diminué entre les zones claires du cerveau et le crâne, et les zones sombres du cerveau et le fond. Donc une tumeur située à côté du crâne sera difficile à séparer de celui-ci. Le bilan n'est pas trop mauvais, mais moins bon qu'en (b).

($\diamondsuit$) En fait, ce qu'il vaut mieux faire, c'est choisir manuellement une transformation de niveaux de gris linéaire par morceaux diminuant le contraste dans le fond et dans le crâne, et augmentant celui au sein du cerveau, tout en gardant un écart entre le cerveau et le fond et le crâne, par exemple :

$$0 \mapsto 0,\ 15 \mapsto 0,\ 120 \mapsto 60,\ 190 \mapsto 220,\ 200 \mapsto 245,\ 255 \mapsto 255.$$

Considérons maintenant le second cas de figure :

(ii) L'image à 256 niveaux de gris provient d'une photo de groupe bien contrastée. Les visages (environ 10% de la surface) sont un petit peu trop clairs (niveaux de gris entre 200 et 220, on préfèrerait entre 180 et 195), les corps (environ 30% de la surface) sont un petit peu trop sombres (niveaux de gris compris entre 60 et 80, on préfèrerait entre 80 et 100), et le fond (environ 60% restants de la surface) est gris moyen (niveaux de gris compris entre 130 et 160), ce qui semble correct.

Examinons les quatre opérations :

(a) Ne rien changer.
Les défauts sont clairement indiqués dans l'énoncé...

(b) Modifier le contraste en appliquant aux niveaux de gris la transformation $g \mapsto g^2/255$ (approximée à l'entier inférieur ou égal).
Cette transformation donne :

$$0 \mapsto 0,\ 60 \mapsto 14,\ 80 \mapsto 25,\ 130 \mapsto 66,\ 160 \mapsto 100,\ 200 \mapsto 156,\ 220 \mapsto 189,\ 255 \mapsto 255.$$

Les corps, le fond, et les visages sont assombris, alors qu'il fallait éclaircir les corps et ne pas changer le fond. De plus les visages sont trop assombris. C'est raté.

(c) Modifier le contraste en appliquant aux niveaux de gris la transformation $g \mapsto (255g)^{1/2}$ (approximée à l'entier inférieur ou égal). Cette transformation donne :

$$0 \mapsto 0,\ 60 \mapsto 123,\ 80 \mapsto 142,\ 130 \mapsto 182,\ 160 \mapsto 201,\ 200 \mapsto 225,\ 220 \mapsto 236,\ 255 \mapsto 255.$$

Les corps, le fond, et les visages sont éclaircis, alors qu'il fallait assombrir les visages et ne pas changer le fond. De plus les corps sont trop éclaircis. C'est raté.

(d) Egaliser l'histogramme des niveaux de gris. Cette transformation donne :

- Les corps (30% de la surface) occuperont à peu près les 30% de niveaux de gris les plus sombres, c.à.d. environ de 0 à 76.
- Les visages (10% de la surface) occuperont à peu près les 10% de niveaux de gris les plus clairs, c.à.d. environ de 229 à 255.
- Le fond (60% de la surface) occupera à peu près les 60% de niveaux de gris intermédiaires, c.à.d. environ de 77 à 228.

Les corps sont en général assombris et les visages sont éclaircis, ce qui est le contraire de ce que l'on voulait. De plus, la bande de niveaux de gris du fond est élargie pour toucher celles des corps et des visages, ce qui signifie que le contraste entre les personnages et le fond sera presque anéanti (effet typique de l'égalisation d'histogramme sur une photo contrastée). C'est complètement raté.

($\diamondsuit$) Comme dans le cas de figure précédent, il vaut mieux choisir manuellement une transformation de niveaux de gris linéaire par morceaux adaptée au problème, par exemple :

$$0 \mapsto 0,\ 60 \mapsto 80,\ 80 \mapsto 100,\ 130 \mapsto 130,\ 160 \mapsto 160,\ 200 \mapsto 180,\ 220 \mapsto 195,\ 255 \mapsto 255.$$

(4) Distance de chanfrein et équidistance *(4 points)*

Soient d une distance donnée par un masque de chanfrein, A et B deux ensembles disjoints de pixels dans une grille rectangulaire G. Pour déterminer les pixels de G équidistants de A et B, on peut adapter l'algorithme de transformée de distances de manière à calculer en même temps la carte de distances par raport à A et par rapport à B, et quand les valeurs exactes de ces distances sont obtenues en un pixel (lors du passage en arrière), on vérifie si le pixel est équidistant de A et B. Quelques notations :

(i) soient M le masque de chanfrein (positionné à l'origine), V son support, V^- la portion de V comprenant l'origine et les pixels antérieurs, et V^+ la portion de V comprenant l'origine et les pixels postérieurs (dans le sens du balayage de G) ;

(ii) pour tout pixel p, soient M_p, V_p, V_p^- et V_p^+ le masque de chanfrein M, son support V, et les deux ensembles V^- et V^+, positionnés en p ; donc pour tout pixel $q \in V_p$, $M_p(q)$ donnera la distance entre p et q selon le masque de chanfrein.

V_p^- et V_p^+ sont le "voisinage antérieur" et le "voisinage postérieur" de p. L'algorithme de transformée de distances utilise un nombre N tenant le rôle de ∞, c.à.d. soit N est plus grand que le diamètre de la grille G, soit N est choisi tel qu'on pose $N > m$ pour tout entier $m \geq 0$ (par exemple on peut prendre $N = -1$). L'algorithme adapté à la situation actuelle va calculer deux cartes de distances f_A et f_B définies par :

$$\forall p \in G \ , \qquad f_A(p) = d(p, A) \quad \text{et} \quad f_B(p) = d(p, B) \ .$$

On définit aussi une image binaire e donnant la carte des pixels équidistants de A et B, c.à.d. $e(p) = 1$ si $d(p, A) = d(p, B)$, et $e(p) = 0$ sinon. Voici l'algorithme (en pseudo-PASCAL) :

Initialisation :

Pour tout $p \in G$ on pose

$$\begin{aligned} e(p) &:= 0; \\ f_A(p) &:= \begin{cases} 0 & \text{si } p \in A; \\ N & \text{sinon;} \end{cases} \\ f_B(p) &:= \begin{cases} 0 & \text{si } p \in B; \\ N & \text{sinon;} \end{cases} \end{aligned}$$

Passage en avant :

Pour le pixel $p \in G$ allant du premier au dernier dans l'ordre de balayage, faire

$$\begin{aligned} f_A(p) &:= \min\{f_A(q) + M_p(q) \mid q \in V_p^-\}; \\ f_B(p) &:= \min\{f_B(q) + M_p(q) \mid q \in V_p^-\}; \end{aligned}$$

Passage en arrière :

Pour le pixel $p \in G$ allant du dernier au premier dans l'ordre de balayage, faire

$$\begin{aligned} & f_A(p) := \min\{f_A(q) + M_p(q) \mid q \in V_p^+\}; \\ & f_B(p) := \min\{f_B(q) + M_p(q) \mid q \in V_p^+\}; \\ & \text{SI } f_A(p) = f_B(p) \quad \text{ALORS } e(p) := 1. \end{aligned}$$