Université Louis Pasteur | **Session de Janvier 2004**
École Doctorale SPI | **DEA d'Informatique**

Géométrie et Morphologie en Traitement d'Images

Durée : 3 heures
Responsable : Prof. Christian RONSE
Documents et calculettes autorisés
Téléphones portables éteints !

Justifiez soigneusement vos réponses !

NB. *Toutes les figures et images, et tous les éléments structurants sont discrets et à 2 dimensions, c.à.d. dans* $\mathbb{Z}^2$.

(1) Formule de morphologie binaire *(6 points)*

Soit X une figure ; le bord de X est l'ensemble ∂X des points de X qui sont 4-adjacents à un point hors de X :

$$\partial X = \{p \in X \mid \exists q \notin X,\ q \text{ 4-adjacent à } p\}.$$

Soit B un élément structurant 4-connexe contenant l'origine.

(i) Démontrer que :

$$X \oplus B = X \cup (\partial X \oplus B).$$

(Indication : utiliser le fait que $X \oplus B = \{p \in E \mid (\check{B})_p \cap X \neq \emptyset\}$*.)*

(ii) Illustrer le résultat pour X étant un carré et B un disque centré sur l'origine.

(iii) Donner deux exemples simples où $X \oplus B \neq X \cup (\partial X \oplus B)$, pour lesquels on a respectivement :

- (a) B est 4-connexe mais ne contient pas l'origine ;
- (b) B contient l'origine mais n'est pas 4-connexe.

(2) Filtrage et segmentation *(5 points)*

On veut, avant de segmenter une image à niveau de gris I, appliquer un filtrage dont l'échelle est variable, donc pour diverses tailles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (avec $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$) on a des filtres $F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_n}$ correspondant à ces tailles, et on segmentera $F_{\lambda_i}(I)$ pour $i = 1, \ldots, n$. On envisage différents types de contraintes pour la combinaison de ces filtres avec la segmentation :

(i) Les frontières des objets (classes) de la segmentation sont lisses, et on vérifie le principe de causalité, c.à.d. quand i augmentate, les différents objets obtenus dans la segmentation de $F_{\lambda_i}(I)$ peuvent évoluer, se scinder, fusionner, ou disparaître, mais jamais être créés à partir de rien.

(ii) Les frontières des objets (classes) de la segmentation ne peuvent jamais passer à travers une zone plate de l'image de départ I (c.à.d., une zone connexe où I a un niveau de gris constant), et quand i augmentate, les différents objets obtenus dans la segmentation de $F_{\lambda_i}(I)$ peuvent fusionner, mais jamais se déformer, ni se scinder, ni disparaître, ni être créés à partir de rien.

Décrire de façon détaillée (masques, fonctions, paramètres, formes, etc., utilisés) des filtres qui pourraient satisfaire (i) et (ii) respectivement.

(3) Réduction topologique *(5 points)*

On a une figure F formant une bande horizontale épaisse de deux pixels (cfr. ci-dessous à gauche), et on choisit un pixel p au milieu de cette bande, qui a 5 voisins q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 dans F (cfr. ci-dessous à droite) :

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & q_2 & q_3 & q_4 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & q_1 & p & q_5 & 1 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{array}$$

On considère les deux choix classiques d'adjacences et connexités pour la figure F et le fond F^c :

(a) 4- sur la figure et 8- sur le fond ;

(b) 8- sur la figure et 4- sur le fond.

Il est clair que p est simple (dans F) pour ces deux choix (a) et (b). Pour chaque $i = 1, \ldots, 5$ et pour chaque choix $(a), (b)$ de connexités, déterminer si la paire $\{p, q_i\}$ peut être enlevée de la figure F sans changer sa topologie.

(4) Mesures sur une figure *(8 points)*

On a une figure en forme de **0** (c'est un anneau connexe, avec un trou, et aussi bien le trou que la figure dont on a bouché le trou sont de forme ellipsoidale). Expliquer comment on pourrait mesurer :

— les minimum et maximum de l'épaisseur (distance entre le contour extérieur et le contour intérieur) de l'anneau ;

— la longueur et la largeur du trou ;

— la longueur et la largeur de la figure.