Université Louis Pasteur **Session de Janvier 2003**
École Doctorale SPI **DEA d'Informatique**

Géométrie et Morphologie en Traitement d'Images

Durée : 3 heures
Responsable : Prof. Christian RONSE
Documents et calculettes autorisés
Téléphones portables éteints !

Justifiez soigneusement vos réponses !

NB. *Toutes les figures et images, et tous les éléments structurants sont discrets et à 2 dimensions, c.à.d. dans* $\mathbb{Z}^2$.

(1) Réduction topologique *(4 points)*

Soit F une figure et B le fond ($B = \mathbb{Z}^2 \setminus F$). On considère deux points p et q de F qui sont 4-adjacents, ayant la configuration suivante de pixels de la figure (marqués 1) et du fond (marqués 0) dans leur 8-voisinage :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \mathit{0} & \mathit{0} \\ \mathit{0} & \mathbf{p} & \mathbf{q} & \mathit{0} \\ \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} \end{array}$$

On a les deux cas :

(4) la 4-adjacence sur la figure et la 8-adjacence sur le fond ;

(8) la 8-adjacence sur la figure et la 4-adjacence sur le fond.

Dans chacun des 2 cas (4) et (8) :

(i) p et q sont-ils des points simples de F ?

(ii) p est-il un point simple de $F \setminus \{q\}$, et q est-il un point simple de $F \setminus \{p\}$?

(iii) Lesquels des 3 ensembles $\{p\}$, $\{q\}$ et $\{p, q\}$ peut-il être enlevé de la figure F sans en modifier la topologie ?

(2) Erosion et ouverture par un élément structurant connexe *(4 points)*

Soit B un élément structurant 4-connexe non vide.

(i) Montrer que l'érosion ensembliste par B agit par érosion de chacune des composantes 4-connexes d'une figure. En d'autres termes, pour une partie X de $\mathbb{Z}^2$ dont les composantes 4-connexes sont $X_1, \ldots, X_n$, on a

$$X \ominus B = \big(X_1 \ominus B\big) \cup \cdots \cup \big(X_n \ominus B\big) \quad .$$

(ii) Déduire qu'il en est de même pour l'ouverture par B :

$$X \circ B = \big(X_1 \circ B\big) \cup \cdots \cup \big(X_n \circ B\big) \quad .$$

(3) Détection et mesure de grains *(4 points)*

On a une image binaire dont la figure (formée des points marqués 1) représente des “grains”. Chaque grain est un object convexe allongé, sans trou, et deux grains distincts ne se touchent pas.

(i) Donner une suite d'opérations permettant, pour un paramètre entier $r > 0$ donné, d'extraire de l'image tous les grains dont la largeur (en pixels) vaut au moins r. (Il faudra en particulier donner un critère pour estimer la “largeur” d'un grain).

(ii) Donner une méthode pour calculer la taille (le nombre de pixels) moyenne des grains dont la largeur est $\geq r_1$ et $< r_2$ (pour $r_1 < r_2$).

(4) Filtre médian hybride *(7 points)*

Considérons les deux éléments structurants A et B illustrés ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \bullet & \underline{\bullet} & \bullet \\ & \bullet & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ & \underline{\bullet} & \\ \bullet & & \bullet \end{array}$$

$$A \qquad\qquad\qquad B$$

où le pixel souligné représente l'origine (A et B sont donc centrés sur l'origine). Soient μ_A et μ_B les filtres médians basés sur ces éléments structurants, c.à.d. pour une image à niveaux de gris I et un pixel p on a :

$$\mu_A(I)(p) = \mathrm{med}\{I(p+a) \mid a \in A\} \ ,$$
$$\mu_B(I)(p) = \mathrm{med}\{I(p+b) \mid b \in B\} \ ,$$

où “med” signifie “valeur médiane de l'ensemble”. On définit le filtre médian hybride η en posant :

$$\eta(I)(p) = \mathrm{med}\{I(p), \mu_A(I)(p), \mu_B(I)(p)\} \ .$$

Comparer l'effet de ce filtre avec celui du filtre médian à fenêtre carrée 3×3 des points de vue suivants :

- élimination du bruit poivre et sel ;
- préservation des arêtes de type “marche” ;
- préservation des coins de rectangles et de losanges.

(5) *(4 points)*

Donner une variant de la transformée de Hough, permettant de détecter dans une image binaire les groupes de points formant deux alignements sur deux droites formant entre elles un angle α (la position et l'orientation des droites est libre, mais l'angle α est fixé une fois pour toutes).