# AIDE-MEMOIRE DE MORPHOLOGIE BINAIRE

*Christian RONSE, LSIIT UMR 7005 CNRS-ULP, Département d'Informatique de l'UdS*

Les images binaires sont considérées comme des parties d'un espace $E = \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{Z}^d$, dont l'origine est notée $o$. Etant donné un point $p \in E$, la *translation* par $p$ transforme un point $q$ en $q+p$ et une partie $X$ de $E$ en sa *translatée par* $p$, notée $X_p$, définie par

$$X_p = \{x + p \mid x \in X\} \ .$$

En particulier, la translation par l'origine $o$ est l'identité. Le *complément* d'un ensemble $X \subseteq E$, noté $X^c$, est l'ensemble $E \setminus X$. Le *symétrique* ou le *transposé* d'un ensemble $B \subseteq E$ est l'ensemble $\check{B}$ défini par

$$\check{B} = \{-b \mid b \in B\} \ ;$$

notons que $\check{\check{B}} = B$ et $(B_p)^\vee = (\check{B})_{-p}$.

## OPÉRATIONS DE MINKOWSKI, DILATATION, ÉROSION

L'addition et la soustraction de Minkowski sont les deux opérations binaires $\oplus, \ominus$ définies sur les parties de $E$ comme suit: pour $X, B \subseteq E$ on a

$$\begin{aligned} X \oplus B &= \bigcup_{b \in B} X_b \ , \\ &= \bigcup_{x \in X} B_x \ , \\ &= \{x + b \mid x \in X, b \in B\} \ ; \\ X \ominus B &= \bigcap_{b \in B} X_{-b} \ , \\ &= \{p \in E \mid B_p \subseteq X\} \ . \end{aligned}$$

Tant les images binaires (figures) que les *éléments structurants* sont des parties de $E$; pour un élément structurant $B$, les opérateurs $\delta_B : X \mapsto X \oplus B$ et $\varepsilon_B : X \mapsto X \ominus B$ de transformation de figures sont appelés la *dilatation par* $B$ et l'*érosion par* $B$. On appelle $X \oplus B$ et $X \ominus B$ le *dilaté* et l'*érodé* de $X$ par $B$.

Les principales propriétés de $\oplus$ et $\ominus$ sont les suivantes ($X, Y, A, B$ et $X_i$, $i \in I$, sont des ensembles, tandis que $p, q$ sont des points):

**Cas des points:**

$$\begin{aligned} \{p\} \oplus \{q\} &= \{p + q\} \ ; \\ \{p\} \ominus \{q\} &= \{p - q\} \ ; \\ X \oplus \{p\} &= X_p; \\ X \ominus \{p\} &= X_{-p} \ . \end{aligned}$$

**Invariance par translation:**

$$\begin{aligned} (X \oplus B)_p &= X_p \oplus B = X \oplus B_p \ ; \\ (X \ominus B)_p &= X_p \ominus B = X \ominus B_{-p} \ . \end{aligned}$$

Donc la translation de l'image $X$ peut être effectuée avant ou après la dilatation (ou l'érosion), ce qui donne le même résultat.

**Commutativité, associativité:**

$$A \oplus B = B \oplus A \;;$$
$$X \oplus (A \oplus B) = (X \oplus A) \oplus B \;;$$
$$X \ominus (A \oplus B) = (X \ominus A) \ominus B \;.$$

Donc dilater par $A \oplus B$ revient à dilater successivement par $A$ puis par $B$, et même chose pour l'érosion par $A \oplus B$.

**Adjonction:**

$$X \oplus B \subseteq Y \iff X \subseteq Y \ominus B \;.$$

En d'autres termes, le dilaté de $X$ est dans $Y$ si et seulement si $X$ est dans l'érodé de $Y$.

**Alternance:**

$$\big((X \oplus B) \ominus B\big) \oplus B = X \oplus B \;; \qquad \big((X \ominus B) \oplus B\big) \ominus B = X \ominus B \;.$$

**Croissance:**

Pour $X \subseteq Y$ et $A \subseteq B$ on a:

$$X \oplus A \subseteq Y \oplus A \;;$$
$$X \ominus A \subseteq Y \ominus A \;;$$
$$X \oplus A \subseteq X \oplus B \;;$$
$$X \ominus A \supseteq X \ominus B \;.$$

Donc la dilatation et l'érosion préservent la relation d'inclusion entre figures, et quand on augmente l'élément structurant, le résultat de la dilatation augmente tandis que celui de l'érosion diminue. Il s'ensuit en particulier que

$$o \in B \implies X \ominus B \subseteq X \subseteq X \oplus B \;.$$

**Distributivité sur l'union ou l'intersection:**

$$\Big(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i\Big) \oplus B = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} (X_i \oplus B) \;;$$
$$\Big(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} X_i\Big) \ominus B = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} (X_i \ominus B) \;;$$
$$X \oplus \Big(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_i\Big) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} (X \oplus B_i) \;;$$
$$X \ominus \Big(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_i\Big) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} (X \ominus B_i) \;.$$

**Dualité par rapport à la complémentation:**

$$(X \oplus B)^c = X^c \ominus \check{B} \;;$$
$$(X \ominus B)^c = X^c \oplus \check{B} \;;$$
$$(X^c \oplus B)^c = X \ominus \check{B} \;;$$
$$(X^c \ominus B)^c = X \oplus \check{B} \;.$$

Donc dilater la figure revient à éroder le complément, mais cette fois avec l'élément structurant transposé. En combinant cette propriété avec la deuxième définition de $\ominus$, on obtient:

$$X \oplus B = \{p \in E \mid (\check{B})_p \cap X \neq \emptyset\} \;.$$

**Théorème de Matheron:**

Toute transformation d'ensembles, croissante et invariante par translations, se décompose en une union d'érosions, c.a.d.: étant donnée $\psi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ telle que $X \subseteq Y$ implique $\psi(X) \subseteq \psi(Y)$, et $\psi(X_p) = \psi(X)_p$, alors il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$, une famille d'éléments structurants, telle que pour tout $X \subseteq E$ on a

$$\psi(X) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} (X \ominus B) \ .$$

Grâce à la dualité par rapport à la complémentation, cette transformation se décompose en une intersection de dilatations: il existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$, une famille d'éléments structurants, telle que pour tout $X \subseteq E$ on a

$$\psi(X) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (X \oplus A) \ .$$

**TRANSFORMÉE EN TOUT OU RIEN**

La *transformée en tout ou rien* (en anglais, *hit or miss transform*) est une opération algébrique utilisant deux éléments structurants. Elle est définie comme suit:

$$\begin{aligned} X \circledast (A, B) &= \{p \in E \mid A_p \subseteq X \text{ et } B_p \subseteq X^c\} \ , \\ &= (X \ominus A) \cap (X^c \ominus B) = (X \ominus A) \setminus (X \oplus \check{B}) \ . \end{aligned}$$

On suppose que $A \cap B = \emptyset$, sinon $X \circledast (A, B) = \emptyset$. L'opérateur $X \mapsto X \circledast (A, B)$ est la *transformée en tout ou rien par* $(A, B)$. Si on construit un masque $M$ sur $A \cup B$, où les points de $A$ sont marqués 1 et ceux de $B$ sont marqués 0, alors en considérant $X$ comme une figure binaire, $X \circledast (A, B)$ sera l'ensemble des points $p$ dont le voisinage se conforme avec le masque $M$ positionné en $p$.

Les principales propriétés de $\circledast$ sont les suivantes ($X, A, B$ sont des ensembles, tandis que $p$ est un point):

**Invariance par translation:**

$$\big(X \circledast (A, B)\big)_p = X_p \circledast (A, B) = X \circledast (A_{-p}, B_{-p}) \ .$$

Donc la translation de l'image $X$ peut être effectuée avant ou après la transformée en tout ou rien, ce qui donne le même résultat.

**Théorème de Banon-Barrera:**

Toute transformation d'ensembles, invariante par translations, se décompose en une union de transformées en tout ou rien, c.a.d.: étant donnée $\psi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ telle que $\psi(X_p) = \psi(X)_p$, alors il existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$, une famille de couples $(A, B)$ d'éléments structurants (supposés disjoints: $A \cap B = \emptyset$), telle que pour tout $X \subseteq E$ on a

$$\psi(X) = \bigcup_{(A,B) \in \mathcal{F}} \big(X \circledast (A, B)\big) \ .$$

**OUVERTURE, FERMETURE**

On définit les opérations binaires $\circ$ et $\bullet$ par

$$\begin{aligned} X \circ B &= (X \ominus B) \oplus B \ , \\ &= \bigcup \{B_p \mid p \in E \text{ et } B_p \subseteq X\} \ ; \\ X \bullet B &= (X \oplus B) \ominus B \ . \end{aligned}$$

Donc $X \circ B$ est la réunion des translatés de $B$ inclus dans $X$. Pour un élément structurant $B$, les opérateurs $\gamma_B : X \mapsto X \circ B$ et $\varphi_B : X \mapsto X \bullet B$ de transformation d'ensembles sont appelés l'*ouverture par* $B$ et la *fermeture par* $B$.

Les principales propriétés de $\circ$ et $\bullet$ sont les suivantes ($X, Y, B$ sont des ensembles, tandis que $p$ est un point):

**Invariance par translation:**

$$(X \circ B)_p = X_p \circ B \ ,$$
$$(X \bullet B)_p = X_p \bullet B \ ;$$
$$X \circ B_p = X \circ B \ ,$$
$$X \bullet B_p = X \bullet B \ .$$

Donc la translation de l'image $X$ peut être effectuée avant ou après l'ouverture (ou la fermeture), ce qui donne le même résultat. De plus, la position de l'élément structurant (par rapport à l'origine) n'intervient pas.

**Croissance:**

Pour $X \subseteq Y$ on a:

$$X \circ B \subseteq Y \circ B \ ;$$
$$X \bullet B \subseteq Y \bullet B \ .$$

Donc l'ouverture et la fermeture préservent la relation d'inclusion entre figures.

**Extensivité, anti-extensivité:**

$$X \circ B \subseteq X \subseteq X \bullet B \ .$$

On dit que l'ouverture est *anti-extensive* tandis que la fermeture est *extensive*.

**Idempotence:**

$$(X \circ B) \circ B = X \circ B \ ;$$
$$(X \bullet B) \bullet B = X \bullet B \ .$$

L'ouverture et la fermeture sont idempotentes, c.a.d. $\gamma_B^2 = \gamma_B$ et $\varphi_B^2 = \varphi_B$.

La propriété d'alternance de la dilatation et de l'érosion donne:

$$(X \oplus B) \circ B = (X \bullet B) \oplus B = X \oplus B \ ; \qquad (X \ominus B) \bullet B = (X \circ B) \ominus B = X \ominus B \ .$$

**Dualité par rapport à la complémentation:**

$$(X \circ B)^c = X^c \bullet \check{B} \ ;$$
$$(X \bullet B)^c = X^c \circ \check{B} \ ;$$
$$(X^c \circ B)^c = X \bullet \check{B} \ ;$$
$$(X^c \bullet B)^c = X \circ \check{B} \ .$$

Donc faire une ouverture sur la figure revient à faire une fermeture sur le complément, mais cette fois avec l'élément structurant transposé. En combinant cette propriété avec la deuxième définition de $\circ$, on obtient:

$$X \bullet B = \left( \bigcup \{ (\check{B})_p \mid p \in E \text{ et } (\check{B})_p \subseteq X^c \} \right)^c \ .$$

Donc $X \bullet B$, la fermeture de $X$ par $B$, peut être obtenue en balayant l'élément structurant transposé $\check{B}$ à l'intérieur du complément $X^c$, et en prenant la surface qui n'a pas été balayée.

**Théorème de Serra-Matheron:**

Toute transformation d'ensembles, croissante, anti-extensive, idempotente et invariante par translations, se décompose en une union d'ouvertures par des éléments structurants, c.a.d.: étant donnée $\psi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ telle que $X \subseteq Y$ implique $\psi(X) \subseteq \psi(Y)$, $\psi(X) \subseteq X$, $\psi(\psi(X)) = \psi(X)$, et $\psi(X_p) = \psi(X)_p$, alors il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$, une famille d'éléments structurants, telle que pour tout $X \subseteq E$ on a

$$\psi(X) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} (X \circ B).$$

Grâce à la dualité par rapport à la complémentation, toute transformation d'ensembles, croissante, extensive, idempotente et invariante par translations, se décompose en une intersection de fermetures par des éléments structurants.