Égalisation de l'histogramme d'une image continue

Christian RONSE, LSIIT UMR 7005 CNRS-ULP, Département d'Informatique de l'ULP

On a une image $r : E \to [0, M]$, où E est borné. Pour $p \in E$, $r(p)$ est le niveau de gris de p, avec $0 \leq r(p) \leq M$.

La distribution de densité de niveaux de gris de l'image r est la fonction $d_r : [0, M] \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $a, b \in [0, M]$ avec $a < b$, on a:

$$\int_a^b d_r(v)\,dv = mes\,\{p \in E \mid a \leq r(p) \leq b\},$$

où mes désigne la mesure (aire, volume, etc.) de l'ensemble. En particulier

$$\int_0^M d_r(v)\,dv = mes\,E,$$

car $E = \{p \in E \mid 0 \leq r(p) \leq M\}$.

Transformation de niveaux de gris:

Soit f une transformation de niveaux de gris, c.à.d. une fonction $[0, M] \to [0, M]$. On suppose f continue, continûment dérivable par morceaux, croissante ($x < y \implies f(x) \leq f(y)$), et strictement croissante sur les niveaux de gris existant dans l'image:

$$x < y \quad \text{avec} \quad x = r(p) \text{ ou } y = r(p) \ (p \in E) \qquad \text{implique} \qquad f(x) < f(y).$$

On a ainsi une nouvelle image $s : E \to [0, M]$, donnée par $s(p) = f(r(p))$. Déterminons la distribution de densité de niveaux de gris de s en fonction de celle de r.

Comme $s(p) = f(r(p))$ et f est strictement croissante sur les niveaux de gris existant dans l'image, pour $0 \leq a < b \leq M$ et $p \in E$ on a:

$$a \leq r(p) \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(a) \leq s(p) \leq f(b).$$

Par conséquent:

$$\int_a^b d_r(v)\,dv = mes\,\{p \in E \mid a \leq r(p) \leq b\} = mes\,\{p \in E \mid f(a) \leq s(p) \leq f(b)\} = \int_{f(a)}^{f(b)} d_s(w)\,dw.$$

Comme f est continue et continûment dérivable par morceaux, en faisant le changement de variable $w = f(u)$, on obtient:

$$\int_a^b d_r(v)\,dv = \int_a^b d_s(f(u))f'(u)\,du. \tag{1}$$

Comme cela est vrai pour tous les a, b tels que $0 \leq a < b \leq M$, on en déduit que

$$d_r(v) = d_s(f(v))f'(v) \qquad (0 \leq v \leq M, \text{ presque partout}). \tag{2}$$

Égalisation d'histogramme:

On demande que d_s soit constant sur $[0, M]$: $d_s(v) = K$ pour $0 \leq v \leq M$. Alors:

$$MK = \int_0^M K\,dv = \int_0^M d_s(v)\,dv = mes\,E,$$

et ainsi $K = mes\, E/M$. Si on avait $f(0) > 0$, alors pour $0 < h < f(0)$, on aurait $s(p) > h$ pour tout $p \in E$, ce qui donnerait:

$$hK = \int_0^h d_s(v)\, dv = mes\, \{p \in E \mid 0 \leq s(p) < h\} = mes\, \emptyset = 0,$$

une contradiction. Donc $f(0) = 0$, et de même on a $f(M) = M$. Comme f est continue et continûment dérivable par morceaux, pour $x \in [0, M]$ on obtient grâce à (1):

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(u)\, du = \frac{1}{K} \int_0^x d_s(f(u)) f'(u)\, du = \frac{1}{K} \int_0^x d_r(v)\, dv,$$

c.à.d.

$$f(x) = \frac{M}{mes\, E} \int_0^x d_r(v)\, dv. \tag{3}$$

On vérifie qu'une telle fonction f est croissante, et strictement croissante sur les niveaux de gris existant dans l'image. Supposant d_r continue par morceaux, f sera effectivement continue et continûment dérivable par morceaux. Ici (2) garantit que d_s est constant presque partout sur $[0, M]$ (et partout si en tout point de $[0, M]$ on a d_r continue et f continûment dérivable)