Université de Strasbourg — **UFR de Mathématiques et Informatique**
L2 d'Informatique S4 — **13 décembre 2016**

Logique et Programmation Logique

Contrôle Continu à 50%

Durée : 1 heure 30 minutes
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents en papier autorisés mais non partagés
Calculettes, téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses !

(1) Calcul propositionnel — résolution sans variable.
On a trois personnes, Jules, Marie et Pierre, ainsi que deux boissons, la bière et le cidre. On a les faits suivants :

— Si Jules aime une boisson, alors Marie aime l'autre boisson.
— Si Marie aime une boisson, alors Pierre aime l'autre boisson.
— Si Pierre aime le cidre, alors Marie l'aime aussi.
— Jules aime au moins une boisson.
— Il y a au moins une boisson que Pierre n'aime pas.
— Au moins une personne n'aime pas le cidre.

Question : Déterminer les boissons que chacun aime et n'aime pas.
Indication : définir 6 symboles propositionnels correspondant au fait qu'une personne aime une boisson, puis traduire les 6 conditions ci-dessus en formules liant ces symboles, et les exprimer sous forme d'un ensemble de clauses ; appliquer ensuite des coupures successives pour trouver les résultats.

(2) Expressions (in)valides ou (in)satisfiables.
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de formules du calcul propositionnel engendrées comme suit :

(i) Tout symbole propositionnel (atome) appartient à $\mathcal{F}$;
(ii) Si A et B appartiennent à $\mathcal{F}$, alors $(A \Leftrightarrow B)$ appartient à $\mathcal{F}$;
(iii) un élément de $\mathcal{F}$ ne peut pas être obtenu autrement que par application répétée de (i) et (ii).

En d'autres termes, $\mathcal{F}$ comprend toutes les formules bien formées du calcul propositionnel qui sont composées uniquement d'atomes (symboles propositionnels), connecteurs $\Leftrightarrow$ (équivalence) et parenthèses ; donc la négation $\neg$, disjonction $\vee$, conjonction $\wedge$ et implication $\Rightarrow$ n'interviennent pas dans la formation des formules de $\mathcal{F}$.

Questions : une formule de $\mathcal{F}$ est-elle (a) toujours satisfiable ? (b) toujours insatisfiable ? (c) toujours valide ? (d) toujours invalide ? Pour chaque question, justifier la réponse en expliquant pourquoi (preuve ou contre-exemple).

(3) Résolution avec variables.

On a les 3 axiomes suivants :

$(A1)$ $\exists X\ \forall Y\ \big[p(X,Y) \wedge p(Y,X)\big]$.

$(A2)$ $\exists X\ \forall Y\ \big[p(X,Y) \Rightarrow q(Y)\big]$.

$(A3)$ $\forall X\ \exists Y\ \big[p(X,Y) \Rightarrow r(X)\big]$.

Montrer qu'on peut en déduire la conséquence suivante :

(C) $\exists U\ \big[q(U) \wedge r(U)\big]$.

Indication : Partant des axiomes et de la négation de la conséquence, les mettre sous forme prénexe, ensuite éliminer les quantificateurs, puis les exprimer sous forme d'ensemble de clauses, et enfin utiliser la méthode de résolution avec variables (avec les 2 règles d'inférence de résolution et diminution) pour aboutir à la clause vide.