Université de Strasbourg **UFR de Mathématiques et Informatique**
L2 d'Informatique S3 **Session de mai 2013**

Logique et Programmation Logique

Contrôle Terminal

Durée : 2 heures
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents en papier autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses !

(1) Fonctions booléennes symétriques.
Soit $B = \{0, 1\}$. Une fonction booléenne à n variables $f : B^n \to B$ est *symétrique* si la valeur qu'elle prend ne change pas quand on permute l'ordre de ses variables : étant donnés $x_1, \ldots, x_n \in B$ et une permutation $(i_1, \ldots, i_n)$ de $(1, \ldots, n)$, on a $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Par exemple, pour $n = 3$, on doit avoir $f(1, 1, 0) = f(1, 0, 1) = f(0, 1, 1)$ et $f(1, 0, 0) = f(0, 0, 1) = f(0, 1, 0)$.

(i) Décrire toutes les fonctions booléennes symétriques à 1 ou 2 variables. (La forme de la description des fonctions est au choix : table de vérité, diagramme de Karnaugh, somme de monômes conjonctifs, combinaison de fonctions logiques élémentaires, etc.).

(ii) Montrer que $f : B^n \to B$ est symétrique si et seulement si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in B^n$, la valeur prise par $f(x_1, \ldots, x_n)$ ne dépend que du nombre de 1 dans la suite $x_1, \ldots, x_n$ des n variables.

(iii) Donner le nombre de fonctions booléennes symétriques à n variables.

(2) Prédicats et clauses (coloriage de graphe).
On a un graphe formé d'un ensemble de sommets et d'une relation binaire d'adjacence entre sommets ; cette relation est symétrique (si x est adjacent à y, alors y est adjacent à x). On souhaite colorier les sommet en bleu, vert ou rouge, de telle façon que deux sommets adjacents ne soient jamais coloriés de la même couleur. Plus précisément :

(a) Chaque sommet est colorié en une et une seule des trois couleurs bleu, vert ou rouge.

(b) Deux sommets adjacents ne peuvent pas être coloriés d'une même couleur bleu, vert ou rouge.

Pour formaliser ce problème dans le calcul des prédicats, on définit cinq prédicats :

$s(x)$: x est un sommet ;
$a(x, y)$: x est adjacent à y;
$b(x)$: x est colorié en bleu ;
$v(x)$: x est colorié en vert ;
$r(x)$: x est colorié en rouge.

Questions :

(i) Exprimer chacun des énoncés (a) et (b) par une formule du calcul des prédicats n'utilisant pas d'autres prédicats que $s(\cdot)$, $a(\cdot,\cdot)$, $b(\cdot)$, $v(\cdot)$ et $r(\cdot)$.

(ii) Éliminer les quantificateurs de chaque formule, puis la transformer en un ensemble de clauses avec variables.

(3) Résolution avec variables.

On considère les énoncés suivants :

1. Quelqu'un qui ne déclare pas ses comptes en Suisse est un étourdi ou un fraudeur.
2. Tous les fraudeurs se voient infliger une amende.
3. Si on se voit infliger une amende, on n'est pas heureux.
4. Tout étourdi heureux se pavane sur le marché.
5. Quiconque n'est pas heureux n'ose plus sortir de chez soi.
6. Il y a quelqu'un qui ne déclare pas ses comptes en Suisse.

Montrer par la méthode de résolution avec variables qu'on peut en déduire la conséquence :

C. Il y a quelqu'un qui se pavane sur le marché ou qui n'ose plus sortir de chez soi.

Indication : Exprimer les énoncés ainsi que la négation de la conséquence dans le calcul des prédicats, puis les mettre sous forme prénexe, ensuite éliminer les quantificateurs, et enfin utiliser la méthode de résolution avec variables (unification / coupure / simplification).

(4) Interprétations.

On considère les deux énoncés suivants :

(a) $\exists\, x\, \forall\, y\ [p(x, y) \implies q(x, y)]$.

(b) $\forall\, y\, \exists\, x\ [p(x, y) \implies q(x, y)]$.

Donner trois interprétations,

(i) la première donnant "vrai" pour (a) et (b) ;

(ii) la deuxième donnant "faux" pour (a) et "vrai" pour (b) ;

(iii) la troisième donnant "faux" pour (a) et (b).

Question annexe :

(iv) Peut-on avoir une interprétation donnant "vrai" pour (a) et "faux" pour (b) ?

NB. Chaque interprétation a un ensemble de base E pour instancier les variables ; pour (i, ii, iii), il y a des solutions avec $|E| = 2$.