Université de Strasbourg **UFR de Mathématiques et Informatique**
L2 d'Informatique **Session de mai 2011**

Logique et Programmation Logique

Contrôle Terminal

Durée : 2 heures
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents en papier autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses

(1) Fonctions booléennes.
Posons $B = \{0,1\}$. Une fonction booléenne à n variables est une application $f : B^n \to B$; une telle fonction est dite *auto-duale* si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in B^n$ on a

$$\overline{f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})} = f(x_1, \ldots, x_n) \ .$$

(i) Expliquer comment on peut vérifier à partir de la table de vérité d'une fonction booléenne si elle est auto-duale. Appliquer cela à la fonction suivante :

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

(ii) Donner toutes les fonctions booléennes auto-duales à 1 variable, puis celles à 2 variables. Exprimer chacune par une formule la plus simple possible.

(iii) Donner la formule pour le nombre de fonctions booléennes auto-duales à n variables.

(2) Unification.
Pour chaque paire d'atomes ci-dessous, donner le plus grand unificateur s'ils s'unifient, sinon expliquer pourquoi ils ne s'unifient pas :

$$p\big(X, Y, Z\big) \quad \text{et} \quad p\big(f(Y, a), g(Z), h(T, b)\big) \qquad (i)$$

$$p\big(X, Y, Z\big) \quad \text{et} \quad p\big(f(Y), g(Z), h(X)\big) \qquad (ii)$$

$$p\big(T, f(Y, b), X\big) \quad \text{et} \quad p\big(Z, X, f(Y, a)\big) \qquad (iii)$$

(NB. Les majuscules désignent des variables, les minuscules des fonctions ou des constantes.)

(3) Forme prénexe et élimination des quantificateurs.

Mettre la formule suivante sous forme prénexe, puis éliminer les quantificateurs par la méthode de Skolem :

$$\forall X \ \Big(\big(\exists Y \ p(X,Y)\big) \iff \big(\forall Z \ \big[q(X,Z) \iff \neg r(Z,X)\big]\big) \Big)$$

(4) Résolution avec variables.

On a les 3 axiomes suivants :

$(A1)$ $\exists X \ \forall Y \ \big(p(X,Y) \vee p(Y,X)\big)$.

$(A2)$ $\forall X \ \big[p(X,X) \Rightarrow \big(q(X) \vee r(X)\big)\big]$.

$(A3)$ $\forall Z \ \big(r(Z) \Rightarrow q(Z)\big)$.

Montrer qu'on peut en déduire la conséquence suivante :

(C) $\exists U \ q(U)$.

Indication : Partant des axiomes et de la négation de la conséquence, les mettre sous forme prénexe, ensuite éliminer les quantificateurs, et enfin utiliser la méthode de résolution avec variables (avec les 2 règles d'inférence de résolution et diminution) pour aboutir à la clause vide.