Université de Strasbourg

Décembre 2011
Feuille de CT (Correction)

Logique et Programmation Logique

Aucun document autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : résolution (8 points)

On veut formaliser un tournoi de tennis en utilisant la logique des prédicats. Pour cela, on introduit

- deux constantes A et B qui représentent deux joueurs, Alain et Bernard,
- deux symboles prédicatifs d'arité 1, de nom i et e, tels que $i(x)$ signifie "x est inscrit au tournoi", et $e(x)$: "x est éliminé du tournoi",
- deux symboles prédicatifs d'arité 2, de nom a et b, tels que $a(x, y)$ signifie "x a joué contre y" et $b(x, y)$: "x a battu y"

1. En suivant l'interprétation intuitive donnée ci-dessus, traduisez en formules logiques les assertions suivantes :
   (a) Alain et Bernard sont inscrits au tournoi
   (b) Un joueur doit être inscrit pour pouvoir jouer et tout joueur battu est éliminé
   (c) Bernard a battu tous les joueurs inscrits qui ont joué contre Alain
   (d) Aucun joueur inscrit ayant battu Bernard n'a joué contre un joueur inscrit battu par Alain

   Correction :
   (a) $i(A) \wedge i(B)$
   (b) $(\forall x\, \exists y\, a(x, y) \Rightarrow i(x)) \;\wedge\; (\forall y\, \exists x\, b(x, y) \Rightarrow e(y))$
   (c) $\forall x\, (i(x) \wedge a(x, A)) \Rightarrow b(B, x)$
   (d) $\neg(\exists x\;\; (i(x) \wedge b(x, B) \wedge (\exists y\, a(x, y) \wedge i(y) \wedge b(A, y)))\;)$

2. Exprimez en langue naturelle les formules suivantes (l'opérateur $\wedge$ est prioritaire sur l'opérateur $\Rightarrow$)
   (a) $\neg\forall x(i(x) \Rightarrow a(x, A))$
   (b) $\exists x \forall y(i(x) \wedge b(B, x) \wedge (i(y) \wedge a(y, A) \Rightarrow b(x, y)))$
   (c) $\forall x \exists y(i(x) \wedge b(x, B) \Rightarrow i(y) \wedge b(y, A) \wedge b(x, y))$

   Correction :
   (a) Il y a un joueur inscrit qui n'a pas joué contre Alain.
   (b) Il y a un joueur inscrit que Bernard a battu qui a battu tous les joueurs inscrits ayant battu Alain.
   (c) Tous les joueurs inscrits ayant battu Bernard ont battu un joueur inscrit ayant battu Alain.

3. En utilisant la résolution avec variables, montrez par réfutation que : "il y a un joueur qui n'a pas été battu" se déduit des faits suivants :
   (a) $\exists x(i(x) \wedge \neg e(x))$
   (b) $\forall x(i(x) \Rightarrow ((\exists y\; b(y, x)) \Rightarrow e(x)))$
   (c) $\forall x\; \forall y(b(x, y) \Rightarrow \neg b(y, x))$

Détailler les différentes étapes de la résolution.

Correction :

Négation de la conclusion :

$$\neg(\exists x\,(\neg\exists y\, b(y,x)))$$

Mise sous forme prénexe :

(a) $\exists x (i(x) \wedge \neg e(x))$

(b) $\forall x \forall y\, (i(x) \Rightarrow (b(y,x) \Rightarrow e(x)))$

(c) $\forall x\, \forall y (b(x,y) \Rightarrow \neg b(y,x))$

(d) $\forall x\, \exists y\, b(y,x)$

Elimination des quantificateurs :

(a) $i(x_0) \wedge \neg e(x_0)$

(b) $i(x) \Rightarrow (b(y,x) \Rightarrow e(x))$

(c) $b(x,y) \Rightarrow \neg b(y,x)$

(d) $b(g(x),x)$

avec f et g des nouveau symboles fonctionnels d'arité 1 et x_0 d'arité 0.

Mise sous forme de clauses :

(a) $i(x_0)$

(b) $\neg e(x_0)$

(c) $\neg i(x) \vee \neg b(y,x) \vee e(x)$

(d) $\neg b(x,y) \vee \neg b(y,x)$

(e) $b(g(x),x)$

Résolution :

1 $a + b : \neg b(y, x_0) \vee e(x_0)$

2 $b + 1 : \neg b(y, x_0)$

3 $2 + e : \perp$

Exercice 2 : déduction naturelle (4 points)

Démontrer en utilisant la déduction naturelle les séquents suivants :

1. $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$

   Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \wedge B}}{\Gamma \vdash B}\ \text{Elim }\wedge d \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow C} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \wedge B}}{\Gamma \vdash A}\ \text{Elim }\wedge g}{\Gamma \vdash B \Rightarrow C}\ \text{Elim }\Rightarrow}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \wedge B \vdash C}\ \text{Elim }\Rightarrow}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash A \wedge B \Rightarrow C}\ \text{Intro }\Rightarrow}{\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)}\ \text{Intro }\Rightarrow$$

2. $\vdash A \Rightarrow (\neg B \vee C) \Rightarrow B \Rightarrow (C \vee \neg A)$

Exercice 3 : Satisfiabilité (4 points)

Soit F une formule propositionnelle construite à partir des seuls connecteurs $\wedge$ et $\vee$ (et à partir de variables propositionnelles). Soient $x_1, \ldots, x_n$ ses variables propositionnelles.

Montrer que si I est une interprétation telle que $I(x_i) = 1$ pour tout i, alors $I(F) = 1$.

Exercice 4 : prolog (4 points)

1. Définir un prédicat `occurence/2` tel que `occurence(L,X,N)` est vrai si N est le nombre de fois où X est présent dans la liste L.
   Correction :

```
occurrence([],_,0).
occurrence([X|L],X,N) :- occurrence(L,X,N1),N is N1+1.
occurrence([Y|L],X,N) :- X\==Y,occurrence(L,X,N).
```

2. Définir un prédicat `sous-ensemble/2` tel que `sous-ensemble(L1,L2)` est vrai si tous les éléments de la liste L1 font partie de la liste L2
   Correction :

```
sous-ensemble([],_).
sous-ensemble([X|R],L2) :- element(X,L2),sous-ensemble(R,L2).
```

Rappels

$$\frac{}{\Gamma \vdash A}\text{ si } A \in \Gamma \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\text{ Intro} \Rightarrow \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\text{ Elim} \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash P}\text{ Elim } \bot$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\text{ Intro } \neg \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\text{ Elim } \neg$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \qquad \Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \wedge Q}\text{ Intro } \wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash P \wedge Q}{\Gamma \vdash P}\text{ Elim } \wedge\text{g} \qquad \frac{\Gamma \vdash P \wedge Q}{\Gamma \vdash Q}\text{ Elim } \wedge\text{d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash P \vee Q}\text{ Intro } \vee\text{g} \qquad \frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \vee Q}\text{ Intro } \vee\text{d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \vee Q \qquad \Gamma, P \vdash R \qquad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma \vdash R}\text{ Elim } \vee$$

FIGURE 1 – Déduction naturelle : logique intuitionniste

$$\frac{\Gamma, \neg P \vdash \bot}{\Gamma \vdash P}\text{ RAA}$$

FIGURE 2 – Déduction naturelle : logique classique