L2-Logique
2011/12

Contrôle continu

Dans toute la suite, $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, $\mathbb{F}_n$ est l'ensemble des fonctions booléennes de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}$ et pour $f \in \mathbb{F}_n$, $Supp(f) = \{\overrightarrow{\varepsilon} \in \mathbb{B}^n \mid f(\overrightarrow{\varepsilon}) = 1\}$ est le support de la fonction booléenne f.

I. (8 points)
Soient les deux fonctions booléennes suivantes :
- $f1(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}.\overline{x_2} + \overline{x_1}.x_2.\overline{x_3} + \overline{x_2}.\overline{x_3} + x_1.\overline{x_2}.x_3$
- $f2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2.\overline{x_3}.\overline{x_4} + \overline{x_1}.x_2.\overline{x_4} + x_1.x_2.x_3.\overline{x_4}$

1. Déterminez le support de chaque fonction boolénne $f1 \in \mathbb{F}_3$ et $f2 \in \mathbb{F}_4$. En déduire la forme normale conjonctive disjonctive (respectivement disjonctive conjonctive) de $f1$ et $f2$.
2. En utilisant la méthode de Karnaugh ou de Quine, calculez l'ensemble des monômes maximaux puis l'ensemble des monômes centraux des fonctions $f1$ et $f2$.
3. Pour chaque fonction $f1$ et $f2$ donnez une expression minimale comme somme de monômes.

II. (5points)
Le système formel fg
Le système fg est défini par $fg = (\Sigma_{fg}, F_{fg}, A_{fg}, R_{fg})$ avec :
- $\Sigma_{fg} = \{f, g, -\}$;
- $F_{fg} = \Sigma^*_{fg}$;
- $A_{fg} = \{Xf - g \mid \ X \in -^*\}$;
- R_{fg} contient une seule règle d'inférence r définie par $XfYgZ \vdash_r XfYgZX$.

1 - Énumérer quelques axiomes de fg. Donner un théorème de fg issu d'une déduction de longueur 0, puis un autre issu d'une déduction de longueur 1.
2 - Les formules suivantes sont-elles des théorèmes de fg ?
$F_1 = --f---g------$
$F_2 = --f--g---$

III. (3 points)
Déterminer parmi les formules suivantes, celles qui sont tautologiques, satisfiables et celles qui sont insatisfiables (justifiez) :

1. $A \wedge \neg B$
2. $(A \wedge (A \to B)) \to B$
3. $(A \wedge \neg B) \to B$

IV. (4 points)
Le système formel p_0
Le système p_0 est défini par $p_0 = (\Sigma_{p_0}, F_{p_0}, A_{p_0}, R_{p_0})$ avec :
- $\Sigma_{p_0} = \{p0, p1, ...pn\} \cup \{\neg, \to, (,)\}$ pi sont les variables propositionnelles ou atomes ;
- F_{p_0} = le plus petit ensemble de formules tq :
  $\forall i \ pi \in F_{p_0}$, $\forall A \in F_{p_0}, \forall B \in F_{p_0} : \neg A \in F_{p_0} et (A \to B) \in F_{p_0}$;
- A_{p_0} = Ensemble de toutes les formules de l'une des trois formes suivantes :
  - $S_{A1} = (A \to (B \to A))$
  - $S_{A2} = ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to B)))$
  - $S_{A3} = (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ avec $A, B, C \in F_{p_0}$;
- R_{p_0} contient une seule règle d'inférence r définie par $A, (A \to B) \vdash_m pB$.

On sait que les formules suivantes sont des théorèmes de p_0 :

1. $\neg\neg B \to B$
2. $B \to \neg\neg B$
3. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

Démontrer que la formule suivante est également un théorème de p_0 :
$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$