

Contrôle Continu (Mars 2011)

Notes de cours manuscrites autorisées. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : résolution (5 points)

1. Si Bill rate son examen alors Bill sera déprimé.
 2. S'il fait beau alors Bill ira à la piscine.
 3. A la piscine, Bill ne travaille pas.
 4. Bill ratera son examen s'il ne travaille pas.
 5. Si Bill ne va pas à la piscine il sera déprimé.
- A l'aide de la résolution montrer que Bill sera déprimé.

Exercice 2 : simplification (5 points)

On considère la formule :

$$\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 + x_2 x_3 \bar{x}_4 x_1 + x_1 x_3 \bar{x}_4 + x_2 x_3 x_4 + x_1 x_4 + x_1 x_3 x_4 x_2 + x_1 x_3 x_4 \bar{x}_2$$

1. A l'aide d'un diagramme de Karnaugh proposer une version simplifiée de cette formule.
2. Retrouver la formule simplifiée par le calcul.

Exercice 3 : système formel (8 points)

Considérons le système formel S suivant :

Soit T l'ensemble des termes contenant les constantes 0 et 1 et clos par deux opérateurs \bowtie et \circ d'arité 2. L'ensemble des formules est l'ensemble des paires d'un élément de T et d'un élément de $\{0, 1\}$.

$$F = T \times \{0, 1\}$$

Ainsi par exemple, les paires suivantes sont des formules : $(1 \bowtie 1, 0)$, $(1, 0)$, $(0 \circ 0, 1)$, $((1 \bowtie 0) \circ (0 \bowtie 1), 0)$...

Le système formel comporte deux axiomes :

$$\frac{}{(1, 1)}$$

$$\frac{}{(0, 0)}$$

Et quatre schémas de règles d'inférence :

$$\frac{(a, 0) \quad (b, 0)}{(a \bowtie b, 0)} R_1$$

$$\frac{(a, 1) \quad (b, 1)}{(a \otimes b, 1)} R_2$$

$$\frac{(a, 0) \quad (b, 1)}{(a \otimes b, 1)} R_3$$

$$\frac{(a, 1) \quad (b, 0)}{(a \otimes b, 1)} R_4$$

1. Donner cinq exemples de formules qui sont des théorèmes de ce système formel. Justifier en donnant la construction de la preuve.
2. Quelle est l'ensemble des formules qui sont des théorèmes de ce système formel ? justifier votre réponse.
3. Ce système formel est-il semi-décidable ? décidable ? justifier votre réponse.
4. Ce système formel est-il cohérent ? justifier votre réponse.
5. Proposer une définition de la validité des formules de ce système (\models) telle que ce système formel soit correct vis-à-vis de cette définition et justifier votre réponse.
6. Étant donnée votre définition de la validité des formules, est-ce que le système formel proposé est complet ? justifier la réponse, et si elle est négative proposer un système formel complet.

Exercice 4 : satisfiabilité (2 points)

Déterminer parmi les formules suivantes, celles qui sont valides, celles qui sont satisfiables et celles qui sont insatisfiables (justifier).

1. $A \vee B \Rightarrow B \vee A$
2. $(A \vee B) \wedge (A \Rightarrow C) \Rightarrow C$
3. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
4. $((A \Rightarrow B) \wedge \neg A) \Rightarrow \neg B$