UFR de Mathématiques et Informatique **L2-Informatique — Logique**

Session de janvier 2008

Contrôle terminal

Corrigé

1. Résolution avec variables

La formalisation des énoncés donne :

$$\begin{array}{rl}
1. & \forall x \left(fr(x) \;\Rightarrow\; \Big(\exists y \left[am(x,y) \wedge be(y)\right]\Big)\right) \\
2. & \forall x \left[be(x) \;\Rightarrow\; mf(x)\right] \\
3. & \forall x \left(\Big(\exists y \left[am(x,y) \wedge mf(y)\right]\Big) \;\Rightarrow\; \left[bp(x) \vee fc(x)\right] \right) \\
4. & \exists x \left[fr(x) \wedge \neg bp(x)\right] \\
5. & \forall x \left[fc(x) \;\Rightarrow\; ac(x)\right] \\
\neg\text{C}. & \forall x\, \neg ac(x)
\end{array}$$

Pour l'énoncé 1, certains ont écrit $am(x, be(y))$ ou même $am(fr(x), be(y))$, ce qui est incohŕent. En effet, $be(y)$ est un booléen qui vaut vrai ou faux, et $am(x, be(y))$ signifie que x est l'ami du fait que y est belge (un booléen) ; or on n'est pas l'ami d'un booléen, mais d'une personne y (qui peut être belge : $be(y)$).

Ci-dessous nous mettons chaque énoncé sous forme prénexe, puis nous éliminons les quantificateurs par la méthode de Skolem, et enfin nous les décomposons en clauses.

1. Pour mettre sous forme prénexe, d'abord on élimine les implications

$$\forall x \left(\neg fr(x) \vee \Big(\exists y \left[am(x,y) \wedge be(y)\right]\Big)\right) \quad ,$$

puis on place les quantificateurs en tête :

$$\forall x \, \exists y \Big(\neg fr(x) \vee \left[am(x,y) \wedge be(y)\right] \Big) \quad .$$

L' élimination des quantificateurs donne

$$\neg fr(x) \vee \left[am(x, ab(x)) \wedge be(ab(x))\right] \quad ,$$

où ab est une fonction "ami belge". Comme il reste une conjonction, par distributivité on obtient deux clauses :

$$\begin{array}{rl}
\mathbf{1a}. & \neg\mathbf{fr}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{am}(\mathbf{x}, \mathbf{ab}(\mathbf{x})) \\
\mathbf{1b}. & \neg\mathbf{fr}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{be}(\mathbf{ab}(\mathbf{x}))
\end{array}$$

2. Ici l'élimination de l'implication donne

$$\forall x \left[\neg be(x) \vee mf(x)\right]$$

qui est sous forme prénexe, en en éliminant les quantificateurs on obtient la clause

$$\mathbf{2}. \quad \neg\mathbf{be}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{mf}(\mathbf{x})$$

3. L'élimination de l'implication donne

$$\forall x \left(\neg\Big(\exists y \left[am(x,y) \wedge mf(y)\right]\Big) \vee \left[bp(x) \vee fc(x)\right] \right) \ ,$$

puis en plaçant les quantificateurs en tête on obtient :

$$\forall x \forall y \left[\neg am(x,y) \vee \neg mf(y) \vee bp(x) \vee fc(x)\right] \ .$$

L'élimination des quantificateurs donne la clause

$$\mathbf{3}. \quad \neg\mathbf{am}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \vee \neg\mathbf{mf}(\mathbf{y}) \vee \mathbf{bp}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{fc}(\mathbf{x})$$

4. L'énoncé est sous forme prénexe, et l' élimination des quantificateurs donne

$$fr(qqn) \wedge \neg bp(qqn) \ ,$$

où *qqn* est une constante "quelqu'un". La conjonction donne deux clauses :

$$\mathbf{4a}. \quad \mathbf{fr}(\mathbf{qqn})$$
$$\mathbf{4b}. \quad \neg\mathbf{bp}(\mathbf{qqn})$$

5. L'élimination de l'implication donne

$$\forall x \left[\neg fc(x) \vee ac(x)\right] \ ,$$

qui est sous forme prénexe, et en éliminant les quantificateurs on obtient la clause

$$\mathbf{5}. \quad \neg\mathbf{fc}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{ac}(\mathbf{x})$$

¬C. L'énoncé est sous forme prénexe, et l' élimination des quantificateurs donne la clause

$$\neg\mathbf{C}. \quad \neg\mathbf{ac}(\mathbf{x})$$

En résumé, on a l'ensemble suivant de clauses :

$$\begin{array}{rl}
\mathbf{1a}. & \neg\mathbf{fr}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{am}(\mathbf{x},\mathbf{ab}(\mathbf{x})) \\
\mathbf{1b}. & \neg\mathbf{fr}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{be}(\mathbf{ab}(\mathbf{x})) \\
\mathbf{2}. & \neg\mathbf{be}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{mf}(\mathbf{x}) \\
\mathbf{3}. & \neg\mathbf{am}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \vee \neg\mathbf{mf}(\mathbf{y}) \vee \mathbf{bp}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{fc}(\mathbf{x}) \\
\mathbf{4a}. & \mathbf{fr}(\mathbf{qqn}) \\
\mathbf{4b}. & \neg\mathbf{bp}(\mathbf{qqn}) \\
\mathbf{5}. & \neg\mathbf{fc}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{ac}(\mathbf{x}) \\
\neg\mathbf{C}. & \neg\mathbf{ac}(\mathbf{x})
\end{array}$$

Pous la résolution, on peut par exemple suivre le raisonnement dans l'ordre des énoncés : *Tout français (1) a un ami belge. Mais (2) ce belge mange des frites. Donc tout français a un ami qui* *mange des frites ; par conséquent (3) tout français boit du pastis ou fume du cigare. Comme (4) il y a un français qui ne boit pas du pastis, ce français fume du cigare. Mais alors (5) ce français attrape un cancer (C).*

Dans la clause 2 on fait $x \leftarrow ab(x)$, et la coupure avec la clause 1b donne

$$\neg fr(x) \vee be(ab(x)),\ \neg be(ab(x)) \vee mf(ab(x))\ \vdash\ \neg fr(x) \vee mf(ab(x)) \tag{6}$$

Dans la clause 3 on fait $y \leftarrow ab(x)$, et la coupure avec la clause 1a donne

$$\begin{aligned} &\neg fr(x) \vee am(x, ab(x)),\ \neg am(x, ab(x)) \vee \neg mf(ab(x)) \vee bp(x) \vee fc(x) \\ &\quad \vdash\ \neg fr(x) \vee \neg mf(ab(x)) \vee bp(x) \vee fc(x) \end{aligned} \tag{7}$$

La coupure des clauses 6 et 7 donne

$$\neg fr(x) \vee mf(ab(x)),\ \neg fr(x) \vee \neg mf(ab(x)) \vee bp(x) \vee fc(x)\ \vdash\ \neg fr(x) \vee bp(x) \vee fc(x) \tag{8}$$

Dans la clause 8 on fait $x \leftarrow qqn$, et la coupure avec la clause 4a donne

$$\neg fr(qqn) \vee bp(qqn) \vee fc(qqn),\ fr(qqn)\ \vdash\ bp(qqn) \vee fc(qqn) \tag{9}$$

La coupure des clauses 9 et 4b donne

$$bp(qqn) \vee fc(qqn),\ \neg bp(qqn)\ \vdash\ fc(qqn) \tag{10}$$

Dans la clause 5 on fait $x \leftarrow qqn$, et la coupure avec la clause 10 donne

$$\neg fc(qqn) \vee ac(qqn),\ fc(qqn)\ \vdash\ ac(qqn) \tag{11}$$

Dans la clause ¬C on fait $x \leftarrow qqn$, et la coupure avec la clause 11 donne la clause vide :

$$\neg ac(qqn),\ ac(qqn)\ \vdash\ \bot$$

Il y a une résolution plus simple en partant de l'énoncé 4, en raisonnant sur la personne indiquée par celui-ci : *Il y a (4) un français, appelons-le qqn, qui ne boit pas du pastis. Comme qqn est français, il a (1) un ami belge. Mais (2) ce belge mange des frites. Donc qqn a un ami qui mange des frites ; par conséquent (3) qqn boit du pastis ou fume du cigare. Comme (4) qqn ne boit pas du pastis, qqn fume du cigare. Mais alors (5) qqn attrape un cancer (C).*

Dans la clause 1a, on fait $x \leftarrow qqn$, et la coupure avec la clause 4a donne

$$\neg fr(qqn) \vee am(a, ab(qqn)),\ fr(qqn)\ \vdash\ am(a, ab(qqn)) \tag{6}$$

On fait de même pour 1b :

$$\neg fr(qqn) \vee be(ab(qqn)),\ fr(qqn)\ \vdash\ be(ab(qqn)) \tag{7}$$

Dans la clause 2 on fait $x \leftarrow ab(qqn)$, et la coupure avec la clause 7 donne

$$\neg be(ab(qqn)) \vee mf(ab(qqn)),\ be(ab(qqn))\ \vdash\ mf(ab(qqn)) \tag{8}$$

Dans la clause 3 on fait $x \leftarrow a, y \leftarrow ab(qqn)$, et la coupure avec la clause 6 donne

$$\begin{aligned} &\neg am(a, ab(qqn)) \vee \neg mf(ab(qqn)) \vee bp(qqn) \vee fc(qqn),\ am(a, ab(qqn)) \\ &\quad \vdash\ \neg mf(ab(qqn)) \vee bp(qqn) \vee fc(qqn) \end{aligned} \tag{9}$$

La coupure des clauses 8 et 9 donne

$$mf(ab(qqn)),\ \neg mf(ab(qqn)) \vee bp(qqn) \vee fc(qqn)\ \vdash\ bp(qqn) \vee fc(qqn) \tag{10}$$

La coupure des clauses 10 et 4b donne

$$bp(qqn) \vee fc(qqn),\ \neg bp(qqn)\ \vdash\ fc(qqn) \tag{11}$$

Dans la clause 5 on fait $x \leftarrow qqn$, et la coupure avec la clause 11 donne

$$\neg fc(qqn) \vee ac(qqn),\ fc(qqn)\ \vdash\ ac(qqn) \tag{12}$$

Dans la clause ¬C on fait $x \leftarrow qqn$, et la coupure avec la clause 12 donne la clause vide :

$$\neg ac(qqn),\ ac(qqn)\ \vdash\ \perp$$

2. Fonctions booléennes

1. Il est facile de voir que $x + y = x\overline{y} + y$ (par exemple par table de vérité). Donc

$$x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_2\,\overline{x_3} + x_3 = x_1\,\overline{(x_2+x_3)} + (x_2\,\overline{x_3} + x_3) = x_1\,\overline{(x_2+x_3)} + (x_2+x_3) = x_1 + x_2 + x_3\ ,$$

qui est évidemment une fonction croissante (décomposition en une somme de produits de variables sans complémentation).

2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1\,\overline{x_2} + x_1\,x_3$ donne $f(1,0,0) = 1\cdot\overline{0} + 1\cdot 0 = 1$ et $f(1,1,0) = 1\cdot\overline{1} + 1\cdot 0 = 0$; donc $(1,0,0) < (1,1,0)$ et $f(1,0,0) > f(1,1,0)$, ainsi f n'est pas croissante.

3. Quantificateurs

On se rapportera au TD 7 sur la "quantification dans un ensemble". Si x n'est pas une variable libre de la formule B, alors :

(*i*) $\forall x \in Z,\ \big[A(x) \wedge B\big]$ est équivalent à $\big[\forall x \in Z,\ A(x)\big] \wedge \big[\forall x \in Z,\ B\big]$.

(*ii*) $\big[\forall x \in Z,\ A(x)\big] \wedge B$ implique $\big[\forall x \in Z,\ A(x)\big] \wedge \big[\forall x \in Z,\ B\big]$.

(*iii*) Sous l'hypothèse $\exists x\ x \in Z$, les deux formules $\big[\forall x \in Z,\ A(x)\big] \wedge B$ et $\big[\forall x \in Z,\ A(x)\big] \wedge \big[\forall x \in Z,\ B\big]$ sont équivalentes.

(*iv*) Si Z est vide, la formule $\big[\forall x \in Z,\ A(x)\big] \wedge \big[\forall x \in Z,\ B\big]$ est toujours vraie, mais si B est faux, la formule $\big[\forall x \in Z,\ A(x)\big] \wedge B$ est fausse.

Ici on prend t et T au lieu de x et Z, B représente $a \leq b$, et $A(t)$ signifie $b \leq v_t$. Donc

(*i*) $\forall t \in T,\ a \leq b \leq v_t$ est équivalent à la conjonction de $\forall t \in T,\ a \leq b$ et de $\forall t \in T,\ b \leq v_t$. Donc la conséquence 2, à savoir $\forall t \in T,\ b \leq v_t$, est toujours vraie.

(*ii*) La conjonction de $a \leq b$ et de $\forall t \in T,\ b \leq v_t$ implique la conjonction de $\forall t \in T,\ a \leq b$ et de $\forall t \in T,\ b \leq v_t$.

(*iii*) Si T est non vide, on a bien $\exists t\ t \in T$, et dans ce cas la conjonction de $\forall t \in T,\ a \leq b$ et de $\forall t \in T,\ b \leq v_t$ est équivalente à la conjonction de $a \leq b$ et de $\forall t \in T,\ b \leq v_t$. On a alors la conséquence 1, à savoir $a \leq b$.

(*iv*) Si T est vide, les formules $\forall t \in T,\ a \leq b$ et $\forall t \in T,\ a \leq b$ sont trivialement vraies, mais ce n'est pas nécessairement le cas pour $a \leq b$, on peut en effet avoir $a > b$.

En résumé, la conséquence 2 ($\forall t \in T,\ b \leq v_t$) est toujours vraie sans condition, tandis que la conséquence 1 ($a \leq b$) est vraie si T est non vide. On peut aussi obtenir ce résultat par raisonnement :

Si pour tout $t \in T$ on a $a \leq b \leq v_t$, alors effectivement tout $t \in T$ vérifie $b \leq v_t$. Supposons T non vide, et soit $t \in T$; on a alors $a \leq b \leq v_t$, donc $a \leq b$. Par contre si T est vide, on a bien

$$\forall t \in \emptyset, \qquad 3 \leq 2 \leq v_t\ ,$$

mais $3 \leq 2$ est faux.

4. Ensembles satisfiables

1. L'ensemble $\{a \wedge b,\ \neg a \vee c,\ \neg b \vee d \vee e,\ d \wedge \neg e\}$ est satisfiable, toutes ses formules satisfont l'interprétation

$$I(a) = I(b) = I(c) = I(d) = V \ , \qquad I(e) = F \ .$$

2. L'ensemble $\{(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a),\ (\neg a \wedge c) \vee (\neg c \wedge a),\ (\neg b \wedge c) \vee (\neg c \wedge b)\}$ est en fait équivalent à $\{a \Leftrightarrow b,\ a \Leftrightarrow \neg c,\ b \Leftrightarrow \neg c\}$, on a donc deux interprétations satisfaites par toutes ses formules :

$$\begin{array}{ll} I(a) = I(b) = V \ , & I(c) = F \ , \\ I(a) = I(b) = F \ , & I(c) = V \ . \end{array}$$

3. L'ensemble $\{\neg a \vee \neg b \vee c,\ a \vee d,\ b \vee e,\ \neg c \vee e,\ d \vee \neg e,\ \neg d \vee e,\ \neg d \vee \neg e\}$ n'est pas satisfiable, on peut en déduire la clause vide par application répétée de la coupure. Numérotons les clauses :

$$\begin{cases} \neg a \vee \neg b \vee c & (1) \\ a \vee d & (2) \\ b \vee e & (3) \\ \neg c \vee e & (4) \\ d \vee \neg e & (5) \\ \neg d \vee e & (6) \\ \neg d \vee \neg e & (7) \end{cases}$$

On a alors les coupures successives :

$$\begin{array}{rll} (6,7) & \neg d \vee e, \neg d \vee \neg e \ \vdash \ \neg d & (8) \\ (8,5) & \neg d,\ d \vee \neg e \ \vdash \ \neg e & (9) \\ (9,4) & \neg e,\ \neg c \vee e \ \vdash \ \neg c & (10) \\ (9,3) & \neg e,\ b \vee e \ \vdash \ b & (11) \\ (8,2) & \neg d,\ a \vee d \ \vdash \ a & (12) \\ (12,1) & a,\ \neg a \vee \neg b \vee c \ \vdash \ \neg b \vee c & (13) \\ (11,13) & b,\ \neg b \vee c \ \vdash \ c & (14) \\ (14,10) & c,\ \neg c \ \vdash \ \perp & \end{array}$$