

Contrôle terminal

Documents autorisés

Justifiez soigneusement vos réponses, votre note en dépend !

1 Résolution avec variables

On considère les énoncés suivants :

1. Tout français a un ami belge.
2. Tous les belges mangent des frites.
3. Si on a un ami qui mange des frites, alors on boit du pastis ou fume du cigare.
4. Il y a un français qui ne boit pas du pastis.
5. Si on fume du cigare, on attrape un cancer.

Montrer par la méthode de résolution avec variables qu'on peut en déduire :

- C. Il y a quelqu'un qui attrape un cancer.

Indication : utiliser les prédicats

- $fr(x)$: x est français.
- $am(x, y)$: x a y comme ami.
- $be(x)$: x est belge.
- $mf(x)$: x mange des frites.
- $bp(x)$: x boit du pastis.
- $fc(x)$: x fume du cigare.
- $ac(x)$: x attrape un cancer.

Mettre sous forme prénexe les énoncés 1 à 5 ainsi que la négation de C, puis éliminer les quantificateurs, et enfin utiliser la méthode de résolution avec variables.

2 Fonctions booléennes

Les fonctions suivantes sont-elles croissantes ?

1. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} + x_2 \overline{x_3} + x_3$.
2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{x_2} + x_1 x_3$.

Rappel : Une fonction booléenne f à n variables est croissante ssi

$$\left(x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n \right) \implies f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n) .$$

On peut montrer que f est croissante ssi on peut décomposer $f(x_1, \dots, x_n)$ comme une somme de produits de variables x_i ($i = 1, \dots, n$) sans complémentation.

3 Quantificateurs

On considère un ensemble de valeurs réelles v_t pour $t \in T$. A priori, on n'a aucune information sur l'ensemble T des indices. On sait que pour deux valeurs a et b on a

$$\forall t \in T, \quad a \leq b \leq v_t .$$

Peut-on en déduire que

1. $a \leq b$?
2. $\forall t \in T, \quad b \leq v_t$?

Pour chacun des deux sous-énoncés : y a-t-il des conditions ?

4 Ensembles satisfiables

Pour chacun des ensembles de formules ci-dessous, donner un modèle ou montrer qu'il est insatisfiable :

1. $\{a \wedge b, \neg a \vee c, \neg b \vee d \vee e, d \wedge \neg e\}$.
2. $\{(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a), (\neg a \wedge c) \vee (\neg c \wedge a), (\neg b \wedge c) \vee (\neg c \wedge b)\}$.
3. $\{\neg a \vee \neg b \vee c, a \vee d, b \vee e, \neg c \vee e, d \vee \neg e, \neg d \vee e, \neg d \vee \neg e\}$.