Calcul des prédicats

1 Quantification dans un ensemble

Remarque préliminaire : *Pour effectuer cet exercice, il faudra impérativement utiliser les règles d'externalisation et de mise en facteur des quantificateurs, cf. le cours du 20/11 et la feuille intitulée "Mise en forme des formules". Il ne faut pas oublier les règles usuelles (distributivité de $\vee$ et $\wedge$, lois de De Morgan, et équivalence entre $P \Rightarrow Q$ et $\neg P \vee Q$).*

Dans de nombreuses formules mathématiques, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ portent sur des éléments d'un ensemble : $\forall x \in Z,\ formule$ et $\exists x \in Z,\ formule$. Nous allons examiner comment les règles du calcul des prédicats s'appliquent dans cette situation.

On suppose que $x \in Z$ est un prédicat ayant x et Z comme variables libres, et que pour une formule P, $\forall x \in Z,\ P$ signifie $\forall x\ (x \in Z \Rightarrow P)$.

1. Exprimer la signification de $\exists x \in Z,\ P$, si on suppose que par dualité $\exists x \in Z,\ P$ doit être équivalent à $\neg(\forall x \in Z,\ \neg P)$.

On suppose que x n'est pas une variable libre de la formule B.

2. Montrer que $\forall x \in Z,\ \big[A(x) \vee B\big]$ est équivalent à $\big[\forall x \in Z,\ A(x)\big] \vee B$.
3. Montrer que $\forall x \in Z,\ \big[A(x) \wedge B\big]$ est équivalent à $\big[\forall x \in Z,\ A(x)\big] \wedge \big[\forall x \in Z,\ B\big]$.
4. Montrer que $B \vdash \forall x \in Z,\ B$ (utiliser la $\forall$-introduction, ou bien raisonner avec une interprétation). En déduire que $\big[\forall x \in Z,\ A(x)\big] \wedge B \vdash \big[\forall x \in Z,\ A(x)\big] \wedge \big[\forall x \in Z,\ B\big]$.
5. Cas où Z est non vide : comme la Terre est habitée, les deux énoncés suivants sont équivalents :
   – La Terre est bleue, et tout habitant de la Terre respire de l'oxygène.
   – Pour tout habitant de la Terre, la Terre est bleue et cet habitant respire de l'oxygène.
   Montrer que $(\exists x\ x \in Z), \big[\forall x \in Z,\ B\big] \vdash B$. En déduire que sous l'hypothèse $\exists x\ x \in Z$, les deux formules $\big[\forall x \in Z,\ A(x)\big] \wedge B$ et $\big[\forall x \in Z,\ A(x)\big] \wedge \big[\forall x \in Z,\ B\big]$ sont équivalentes.
6. Cas où Z est vide : comme Mars est une planète rouge inhabitée, les deux énoncés suivants ne sont pas équivalents :
   – Mars est une planète bleue, et tout habitant de Mars porte un chapeau jaune.
   – Pour tout habitant de Mars, Mars est une planète bleue et cet habitant porte un chapeau jaune.
   Donc sous l'hypothèse $\neg(\exists x\ x \in Z)$, c.-à-d. $\forall x\ \neg(x \in Z)$, les deux formules $\big[\forall x \in Z,\ A(x)\big] \wedge B$ et $\big[\forall x \in Z,\ A(x)\big] \wedge \big[\forall x \in Z,\ B\big]$ ne sont pas équivalentes.