Calcul des propositions

1 Démonstrations

Dans cette partie, utilisez le méta-théorème de la déduction pour trouver des démonstrations dans le système CP0 donné en cours :
1) $((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$;
2) $(p \to ((p \to q) \to q))$;
3) Le texte suivant donne un déduction qui est ou n'est pas correcte.
Traduire les arguments en logique propositionnelle à l'aide des lettres données puis vérifier si une telle déduction est correcte.
1 - Si le lion ne se cache pas, alors la chasse se termine bientôt. Si la chasse se termine bientôt, alors le lion est tué ou le chasseur est mangé par le lion. Le lion n'est pas tué. Donc, le chasseur est mangé par le lion ou le lion se cache.

L : « le lion se cache »
B : « la chasse se termine bientôt »
K : « le lion est tué »
M : « le chasseur est mangé par le lion »

2 Expressions valides et satisfiables

Déterminer parmi les expressions de CP0 suivantes, celles qui sont valides, celles qui sont satisfiables et celles qui sont insatisfiables.
- E_0 : $p \vee \neg p$
- E_1 : $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
- E_2 : $(p \wedge (p \to q)) \to q$
- E_3 : $(p \to (q \to p))$
- E_4 : $(p \to q) \vee (q \to p)$
- E_5 : $(\neg\neg p \to \neg q) \to (m \to p)$
- E_6 : $\neg\neg p \vee p$
- E_7 : $((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee (r \to \neg(q \wedge t)))) \to u$

3 Expressions équivalentes

Trouver les couples d'expressions équivalentes parmi ces formules de CP0.
- F_0 : $p \to \neg q$
- F_1 : $(p \wedge q) \vee (p \wedge m)$
- F_2 : $(p \vee q) \to \neg(q \wedge m)$
- F_3 : $p \to (q \to p)$
- F_4 : $\neg q \vee \neg m$
- F_5 : $q \to \neg p$
- F_6 : $\neg(\neg p \wedge \neg q)$
- F_7 : $\neg q \vee q$
- F_8 : $(p \to \neg m) \to (p \vee q)$
- F_9 : $m \vee p \vee q$

4 Complétude

On considère le système formel CP0' construit à la manière de CP0 avec les connecteurs $\neg$ et $\rightarrow$, et avec comme seul schéma d'axiomes :

$$Ax \ : \ (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p)$$

et comme règle d'inférence :

$$p, p \rightarrow q \vdash q$$

Remarque : les parenthèses n'ont pour rôle que de préciser les regroupements et n'interviennent pas dans le système.

1 - Préciser la définition de ce système formel. Donner des définitions pour les connecteurs $\vee$ et $\wedge$ permettant de retrouver les équivalences standard.

On interprète ce système par l'algèbre de Boole standard.

2 - Est-ce que tout théorème de CP0' est une tautologie ?
3 - Montrer que $T_{\mathrm{CP0'}}$ est égal à :

$$\{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A) \mid A, B \in F_{\mathrm{CP0'}}\} \cup \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \mid A, B \in F_{\mathrm{CP0'}}\}$$

4 - Est-ce que toute tautologie est un théorème de CP0' ?
5 - Le méta-théorème de déduction est-il valable pour ce système formel ?
6 - Quelle est la réponse au problème de la décision pour CP0' ?