Systèmes Formels

1 Modélisation des systèmes formels

Pour les trois systèmes formels suivants, vous commencerez d'abord par leurs formalisations en indiquant pour chacun d'eux, l'alphabet, l'ensemble des formules bien formées, l'ensemble des axiomes et l'ensemble des règles d'inférences.

1. On considère le système formel dont les formules sont les couples (a, b) d'entiers naturels $(a, b \in \mathbb{N})$. Les règles d'inférence sont :
$$(a, b) \vdash (a + 1, b + 1)$$
$$(a, b) \vdash (a + 1, b)$$
et le seul "axiome" est : $(0, 0)$. Déterminer les "théorèmes" de ce système.
2. Dans le système formel suivant, les formules sont les triplets (a, b, c) d'entiers naturels $(a, b, c \in \mathbb{N})$. Les règles d'inférence sont :
$$(a, b, c) \vdash (a + 1, b + 1, c)$$
$$(a, b, c) \vdash (a + 1, b, c + 1)$$
et le seul "axiome" est : $(0, 0, 0)$. Déterminer les "théorèmes" de ce système.
3. Un homme doit faire traverser une rivière à un loup, une chèvre, et un chou. Le bac qui traverse la rivière peut contenir uniquement l'homme et (éventuellement) un des trois parmi le loup, la chèvre, et le chou. S'il laisse le loup et la chèvre sans surveillance sur une rive, le loup mangera la chèvre ; s'il laisse la chèvre et le chou sans surveillance sur une rive, la chèvre mangera le chou. Il lui faut absolument éviter ces deux choses. Donner un système formel modélisant ce problème, et donner une solution dans ce système. Indications : on considère une répartition des 4 protagonistes et de la barque sur les 2 rives comme un "état", et la traversée de la rivière comme une transition entre deux états ; il faut d'abord donner un codage des états, exprimer dans celui-ci les transitions possibles et les pré- et post-conditions qu'elles nécessitent ; enfin on exprime dans ce formalisme l'état initial (l'"axiome"), puis les transitions possibles sous forme *état*, *condition* $\vdash$ *nouvel_état*. La solution retenue pourra être décrite comme une suite de "déductions".

2 Système `fg`

Le système `fg` est défini par $\texttt{fg} = (\Sigma_{\texttt{fg}}, F_{\texttt{fg}}, A_{\texttt{fg}}, R_{\texttt{fg}})$ avec :
- $\Sigma_{\texttt{fg}} = \{\texttt{f}, \texttt{g}, \texttt{-}\}$;
- $F_{\texttt{fg}} = \Sigma^*_{\texttt{fg}}$;
- $A_{\texttt{fg}} = \{X\texttt{f-g} \mid X \in \texttt{-}^*\}$;
- $R_{\texttt{fg}}$ contient une seule règle d'inférence r définie par $X\texttt{f}Y\texttt{g}Z \vdash_r X\texttt{f}Y\texttt{g}ZX$.

1 - Énumérer quelques axiomes de `fg`. Exprimer la règle d'inférence r sous forme d'un ensemble. Donner un théorème de `fg` issu d'une déduction de longueur 0, puis un autre issu d'une déduction de longueur 1.
2 - Les formules suivantes sont-elles des théorèmes de `fg` ?
F_1 `--f---g------`
F_2 `--f--g---`
3 - Quelle est la forme générale des théorèmes de `fg` ?

3 Système MU de D. Hofstadter

On considère le système formel MU défini par :
- $\Sigma_{MU} = \{$M, I, U$\}$;
- $F_{MU} = \Sigma^*_{MU}$;
- $A_{MU} = \{$MI$\}$;
- $R_{MU} = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ avec :
  - $r_1 : f \vdash fU$
  - $r_2 : Mf \vdash Mff$
  - $r_3 : fIIIg \vdash fUg$
  - $r_4 : fUUg \vdash fg$

1 - Montrer que MUI, et $MUIU$ sont des théorèmes de MU.
2 - Montrer que tout théorème de MU commence par M.
3 - Est-ce que MU est un théorème de MU ? (indication : montrer que le nombre de I des théorèmes de MU suit une certaine règle arithmétique).
4 - Montrer que pour $t \in \mathbb{N}$, MI^{2^t} et $MI^{2^t}U$ sont des théorèmes de MU.
5 - Caractériser les théorèmes de MU.