Simplification, ensembles dénombrables, ...

1 Simplification par les diagrammes de Karnaugh et la méthode de Quine

1. Simplifier les expressions suivantes en utilisant la méthode de Karnaugh en précisant à chaque fois les monômes maximaux et centraux :
   (a) $x_1x_2 + \overline{x}_1\overline{x}_2 + x_3$,
   (b) $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1x_2x_3\overline{x}_4$ et
   (c) $\overline{x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2x_3x_4}$.
2. En utilisant la méthode de Quine simplifier les expressions suivantes en précisant à chaque fois les monômes maximaux et centraux :
   (a) $\mathrm{NAND}_2(\overline{\overline{x}_1 \iff x_2}, x_1 + \overline{x}_2)$,
   (b) $(\overline{x}_1 + x_3) \Rightarrow \overline{x}_2x_3$,
   (c) $\mathrm{NAND}_2(x_2, \mathrm{NOR}_2(x_1, x_3)) + x_2\overline{x}_4$,
   (d) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$,
   (e) $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1x_2x_3\overline{x}_4$,
   (f) $x_1x_2 + \overline{x}_2x_4 + x_3x_4 + \overline{x}_1\overline{x}_4 + \overline{x}_2\overline{x}_4$ et
   (g) $x_1x_2x_3\overline{x}_4 + x_1x_2\overline{x}_3 + x_1x_2x_3x_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2x_3$.

2 Ensembles dénombrables

1. Construire une bijection entre l'ensemble des nombres pairs et $\mathbb{N}$.
2. Montrez que tout sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
3. Construire une bijection entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$.
4. Construire une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.
5. Montrer que pour tout ensemble dénombrable E, E^2 est dénombrable.
6. Montrez que pour tout ensemble E, il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$ où $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E.
7. Déduire de la question précédente, en utilisant un codage des nombres réels de $[0, 1[$, qu'il n y pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$.