Monômes et fonctions booléennes

Dans toute la suite, si x est une variable booléenne alors $x^0 = \overline{x}$ et $x^1 = x$.

1 Formes canoniques et identités booléennes

1. Donnez la forme normale conjonctive disjonctive (respectivement disjonctive conjontive) des fonctions booléennes suivantes :
   - $f(x_1, x_2) = \mathrm{NAND}_2(\overline{\overline{x}_1 \iff x_2}, x_1 + \overline{x}_2)$,
   - $g(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 + x_3) \Rightarrow \overline{x}_2 x_3$,
   - $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{NAND}_2(x_2, \mathrm{NOR}_2(x_1, x_3)) + x_2\overline{x}_4$ et
   - $k(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.
2. En utilisant les identités booléennes, simplifier les expressions suivantes :
   - $(x_1 + x_2)(\overline{\overline{x}_1 + x_2})(\overline{x}_1 + \overline{x}_2)$,
   - $x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2 + \overline{x}_2$ et
   - $(x_1x_2 + x_1\overline{x}_3)(\overline{x}_2x_3 + x_2x_3)$.

2 Monômes conjonctifs et disjonctifs

1. Donnez tous les monômes conjonctifs que l'on peut construire en utilisant les deux variables x_1, x_2.
2. Soit $m = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} ... x_{i_k}^{\varepsilon_k}$ un monôme conjonctif avec $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$ et $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k \in \mathbb{B}$. Calculer $\mathrm{card}(\mathcal{S}_m)$.
3. Soit $m = x_{i_1}^{\varepsilon_1} + x_{i_2}^{\varepsilon_2} + ... + x_{i_k}^{\varepsilon_k}$ un monôme disjonctif avec $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$ et $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k \in \mathbb{B}$. Calculer $\mathrm{card}(\mathcal{S}_m)$.
4. Donnez une condition nécessaire et suffisante vérifiée par deux monômes conjonctifs m, m' pour avoir $\mathcal{S}_m \subseteq \mathcal{S}_{m'}$. Trouvez une condition analogue lorsque les deux monômes considérés sont disjonctifs.
5. Donnez 5 polynômes sur les deux variables x_1, x_2 syntaxiquement différents mais correspondant à la même fonction booléennes $f \in \mathbb{F}_2$.
6. Calculez le nombre de monômes conjonctifs que l'on peut construire en utilisant les n variables $x_1, ..., x_n$ puis le nombre de polynômes que l'on peut construire avec les n variables $x_1, ..., x_n$.
7. Déduire de la question précédente, qu'il existe un élément $f \in \mathbb{F}_4$ qui peut être représenté par 2^{65} polynômes syntaxiquement différents sur les 4 variables x_1, x_2, x_3, x_4.

3 Fonctions croissantes

1. Donnez toutes les fonctions croissantes de $\mathbb{F}_2$.
2. Soit m un entier inférieur ou égal à n et $f_m \in \mathbb{F}_n$ tel que $f_m(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = 1$ si et seulement si au moins m parmi les $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ valent 1. Montrez que f_m est croissante.
3. Trouvez une écriture minimale sous forme conjonctive disjonctive de f_m.