Département d'Informatique
LICENCE 2ème année
Travaux Dirigés de Logique
Mercredi 10 décembre 2008

Formes normales, Unification et Résolution avec variables

1 Mise sous forme(s) normale(s)

1.1 Formes prénexes

Faire « remonter » les quantificateurs en tête de formule en utilisant les formules vues en cours (et sans forcément modifier les connecteurs).

(a) $\forall x(p(x) \Rightarrow \exists z(\neg\forall y(q(x,y) \Rightarrow p(f(a))) \wedge \forall y(q(x,y) \Rightarrow p(x))))$
(b) $\neg((\forall x \exists y\ p(x,y) \wedge \forall y \exists x\ q(y,z)) \Rightarrow \forall x \exists y \exists z(p(x,y) \wedge q(y,z)))$
(c) $\exists y \forall z(p(z,y) \Leftrightarrow \neg\exists x(p(z,x) \wedge p(x,z)))$

1.2 Formes de Skolem

Mettre sous forme prénexe, puis sous forme de clausale de Skolem, les formules suivantes.

(a) $(\exists x\ p(x) \Rightarrow (r(x) \vee \forall y\ p(y))) \wedge \forall x\ \exists y\ (r(y) \Rightarrow p(x))$
(b) $((p_1(x_1) \Rightarrow \exists x_2\ p_2(x_2)) \Rightarrow \exists x_3\ p(x_3)) \Rightarrow \exists x_4\ q(x_4)$
(c) $(\forall x\ (p(x) \wedge \exists y\ q(x,y))) \wedge (\forall x\ p(x) \Rightarrow \exists y\ r(y))$

2 Unification

Unifier les atomes suivants lorsque c'est possible :

(a) $A = p(x, f(x), g(f(x), x))$ et $B = p(z, f(f(a)), g(f(g(a,z)), v))$;
(b) $A = p(f(g(x,y)), g(v,w), y)$ et $B = p(f(z), x, f(x))$;
(c) $A = p(x, f(x), f(f(x)))$ et $B = p(u, w, w)$;
(d) $A = p(x, f(x), f(f(x)))$ et $B = p(f(f(y)), y, f(y))$.

3 Résolution

Déduire la clause vide des trois formules suivantes :

(a) $\neg p(x) \vee p(f(x))$;
(b) $p(a)$;
(c) $\neg p(f(z))$.

Idem avec les formules suivantes :

(a) $\neg q(f(z), y)$;
(b) $q(a,y) \vee \neg p(f(y), f(y))$;
(c) $p(f(x), f(y)) \vee \neg p(x,y) \vee \neg r(x)$;

(d) $r(b)$;
(e) $p(b, b)$;
(f) $\neg q(x, y) \vee q(f(x), f(x))$.

4 Conséquences

Montrer dans les cas suivants que la formule F est conséquence des axiomes A_i.

a - $F = \forall u\ q(u)$ est conséquence de :
$A_1 = \forall x \exists y\ p(x, y)$; et
$A_2 = \forall z_1 \forall z_2\ (p(z_1, z_2) \Rightarrow q(z_1))$.

b - $F = \forall x\ (p(x) \Rightarrow p(f(f(x))))$ est conséquence de :
$A_1 = \forall x\ (p(x) \Rightarrow r(f(x)))$; et
$A_2 = \forall x\ (r(x) \Rightarrow p(f(x)))$.

c - $F = \exists x\ [\forall y\ p(x, y, y) \wedge \forall z \exists u\ p(z, u, x)]$ est conséquence de :
$A_1 = \forall x \forall y \exists z\ p(x, y, z)$;
$A_2 = \forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w\ ((p(x, y, u) \wedge p(y, z, v)) \Rightarrow (p(x, v, w) \Leftrightarrow p(u, z, w)))$;
$A_3 = \exists x\ [\forall y\ p(x, y, y) \wedge \forall z \exists u\ p(u, z, x)]$.

d - $F =$ « Il y a des gens malhonnêtes non arrêtés » est conséquence de :
$A_1 =$ « Pour tout crime, il y a quelqu'un qui l'a commis » ;
$A_2 =$ « Seuls les gens malhonnêtes commettent des crimes » ;
$A_3 =$ « Ne sont arrêtés que les gens malhonnêtes » ;
$A_4 =$ « Les gens malhonnêtes arrêtés ne commettent pas de crimes » ;
$A_5 =$ « Il y a des crimes ».