Département d'Informatique
LICENCE 2ème année
Travaux Dirigés de Logique
Mercredi 1 octobre 2008

TD1 - Calculs sur les fonctions booléennes

Dans toute la suite, $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}_n$ dénotera l'ensemble des fonctions booléennes à n variables et $\mathcal{S}_f = \{\overrightarrow{b} \in \mathbb{B}^n \mid f(\overrightarrow{b}) = 1\}$ est le support de la fonction $f \in \mathbb{F}_n$.

1 Supports des fonctions booléennes

1. Donnez les supports des fonctions booléennes suivantes :
   - $f(x_1, x_2) = \text{NAND}_2(\overline{\overline{x}_1 \iff x_2}, x_1 + \overline{x}_2)$,
   - $g(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 + x_3) \Rightarrow \overline{x}_2 x_3$,
   - $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{NAND}_2(x_2, \text{NOR}_2(x_1, x_3)) + x_2\overline{x}_4$ et
   - $k(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.
2. Dessinez les diagrammes de Karnaugh des fonctions f, g, h, k et proposez des simplifications pour ces fonctions.
3. Exprimez tous les éléments de $\mathbb{F}_2$ en utilisant seulement par composition l'opérateur NAND_2. Idem en utilisant l'opérateur NOR_2.
4. Existe-t-il un élément de $\mathbb{F}_2$, autre que NAND_2 et NOR_2, qui permet, seul par composition, d'exprimer tous les éléments de $\mathbb{F}_2$?
5. Soient $f_1, f_2 \in \mathbb{F}_n$. Exprimer en fonction de f_1 et f_2, les fonction booléennes dont les supports sont $\mathbb{B}^n \setminus \mathcal{S}_{f_1}$, $\mathcal{S}_{f_1} \cap \mathcal{S}_{f_2}$, $\mathcal{S}_{f_1} \cup \mathcal{S}_{f_2}$, $\mathcal{S}_{f_1} \setminus \mathcal{S}_{f_2}$, $\mathcal{S}_{f_1} \Delta \mathcal{S}_{f_2}$ et $P_{n-1}(\mathcal{S}_{f_1})$ où $\setminus, \cap, \cup, \Delta$ respectivement P_{n-1} est la soustraction, l'intersection, l'union, la différence symétrique ensemblistes respectivement la projection sur les $n-1$ premières composantes *(Les définitions de ses opérations seront rappelées au tableau)*.
6. Illustrez la question précédente en utilisant $f_1 = h$ et $f_2 = k$ où h, k sont données dans la question 1. de cet exercice ; puis simplifier autant que possible les expressions obtenues.

2 Fonctions génératrices

Soit $C(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + \overline{x}_1x_3$.

1. Montrez que pour tout entier $n > 0$ et pour toute fonction $f \in \mathbb{F}_n$,
$$f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = C(x_n, f(x_1, ..., x_{n-1}, 1), f(x_1, ..., x_{n-1}, 0)).$$
2. En utilisant la question précédente, exprimer la fonction $f(x_1, x_2) = \text{NAND}_2(\overline{\overline{x}_1 \iff x_2}, x_1 + \overline{x}_2)$ de $\mathbb{F}_2$ en utilisant seulement la fonction C et les constantes 0 et 1.
3. Déduire de la question **1.**, que toute fonction booléenne peut s'exprimer en utilisant seulement la fonction C et les constantes 0 et 1.
4. Donnez en fonction de n un majorant du nombre d'occurrences de C nécéssaire pour écrire une fonction $f \in \mathbb{F}_n$ en utilisant seulement la fonction C et les constantes 0 et 1.

3 Codage des fonctions booléennes

1. Soit $b_n : \mathbb{B}^n \rightarrow \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ l'application définie par :

$$b_n(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 2 + ... + \varepsilon_n 2^{n-1}$$

   Montrez que b_n est une bijection

2. Soit $cod_n : \mathbb{F}_n \rightarrow \{0, ..., 2^{2^n} - 1\}$ l'application définie par

$$cod_n(f) = \sum_{\overrightarrow{\varepsilon} \in \mathcal{S}_f} 2^{b_n(\overrightarrow{\varepsilon})}$$

   (a) Montrez que cod_n est une bijection.
   (b) Explicitez complètement cod_1, cod_2.
   (c) Cherchez une relation entre $cod_n(f)$ et $cod_n(\overline{f})$

3. Expliquez comment modéliser l'addition des entiers représentés en base 2 sur n bits en utilisant certaines fonctions booléennes.