CC – Fonctions booléennes

Durée : 1h. Les notes de cours et de travaux dirigés sont autorisées. Il sera tenu compte de la présentation.

Dans toute la suite, $\mathbb{B} = \{0,1\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}_n$ dénotera l'ensemble des fonctions boolèennes à n variables et $\mathcal{S}_f = \{\overrightarrow{b} \in \mathbb{B}^n \mid f(\overrightarrow{b}) = 1\}$ est le support de la fonction $f \in \mathbb{F}_n$.

1 Vrai ou faux

Dire pour chacune de ces affirmations si elle est vraie ou fausse.

1. Le nombre de monômes conjonctifs que l'on peut construire en utilisant n variables est 3^n.
2. Tout monôme maximal est central.
3. Si f et g sont des fonctions booléennes, alors $\mathcal{S}_f \cup \mathcal{S}_g = \mathcal{S}_{f+g}$.
4. Si f et g sont des fonctions booléennes, alors $\mathcal{S}_f \cap \mathcal{S}_g = \mathcal{S}_{gf}$.
5. Le nombre de fonctions booléennes de $\mathbb{F}_n$ est égal à 2^n.

2 Expression

1. Donner une expression de la fonction f de $\mathbb{F}_3$ telle que $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ si et seulement si une majorité de variables parmi x_1, x_2 et x_3 sont à 1.
2. Donner la forme normale conjonctive disjonctive de f, puis la forme normale disjonctive conjonctive.

3 Simplification

Simplifier la fonction booléenne :

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2\overline{x_3x_4} + \overline{x_1}x_2\overline{x_3x_4} + x_1\overline{x_2x_3}x_4 + x_1\overline{x_2x_3x_4} + x_1\overline{x_2}x_3x_4 + \overline{x_1x_2x_3x_4} + \overline{x_1x_2}x_3x_4 + \overline{x_1x_2x_3}x_4$$

en utilisant les deux méthodes :

1. Méthode de Karnaugh,
2. Méthode de Quine.

(Pour chaque méthode, présenter les différentes étapes, préciser quels sont les monômes maximaux et centraux, et justifier vos réponses).

4 Fonctions duales

Soit $f \in \mathbb{F}_n$ on appelle *duale* de f la fonction $f^\star$ telle que $f^\star(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)}$.

1. Calculer les duales des fonctions booléennes :
   $h : x \mapsto x$, $i : x \mapsto \overline{x}$, $j : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ et $k : (x_1, x_2) \mapsto x_1x_2$.
2. Montrer que pour toute fonction booléenne f on a : $(f^\star)^\star = f$.
3. Soit M la fonction booléenne à 3 variables définie par :
   $M(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$. Montrer que $M^\star = M$.