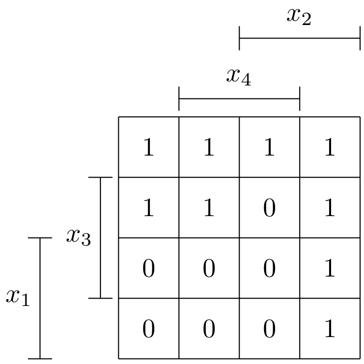
Contrôle continu (corrigé)

I.

On commence par calculer la table de vérité de f :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_1x_4	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_4$	$\overline{x}_1x_2x_3x_4$	$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0

On en déduit que le support est : $Supp(f) = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 1100, 1110\}$
Donc les formes normales de f sont $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4 + x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1x_2x_3\overline{x}_4$ et
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 * x_1 + x_2 + x_3 + \overline{x}_4 * x_1 + x_2 + \overline{x}_3 + x_4 * x_1 + x_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4 * x_1 + \overline{x}_2 + x_3 + x_4 * x_1 + \overline{x}_2 + x_3 + \overline{x}_4 * x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 + x_4 * \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3 + x_4 * \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 + x_4$
On obtient le diagramme de Karnaugh suivant :



Les monômes maximaux sont : $\overline{x}_1\overline{x}_2, \overline{x}_1\overline{x}_4, x_2\overline{x}_4, \overline{x}_1\overline{x}_3$
Les monômes centraux sont : $\overline{x}_1\overline{x}_2, x_2\overline{x}_4, \overline{x}_1\overline{x}_3$
On en déduit la simplification suivante : $\overline{x}_1\overline{x}_2 + x_2\overline{x}_4 + \overline{x}_1\overline{x}_3$ C'est la seule solution de taille minimale car toutes les solutions contiennent au moins les monômes centraux et que celle-ci est composée uniquement des monômes centraux.

II.

1. (a) $\vdash_{Ax} (\epsilon, I) \vdash_{r_1} (I, II)$
   (b) $\vdash_{Ax} (I, \epsilon) \vdash_{r_1} (II, I)$
   (c) $\vdash_{r_1} (\epsilon, I) \vdash_{r_1} (I, II) \vdash_{r_1} (II, III) \vdash_{r_1} (III, IIII) \vdash_{r_1} (IIII, IIIII)$
2. Supposons que (II, II) soit un théorème. Ce n'est pas un axiome donc une règle d'inférence a été utilisée. Cela peut être r_1,r_2 ou r_3. Donc l'une des formules suivantes est un théorème : (I, I), (ϵ, II), (II, ϵ). Dans les trois cas, ce ne sont pas des axiomes, et donc une régle d'inférence a été utilisée. On en déduit dans les trois cas que (ϵ, ϵ) serait un théorème. Mais c'est absurde car ce n'est pas un axiome et aucune règle d'inférence ne peut être utilisée. Notre hypothèse est donc fausse et (II, II) n'est pas un théorème. De manière analogue on déduit que (I, III) n'est pas un théorème.
3. Prouvons par induction que si (m, n) est un théorème alors (n, m) est aussi un théorème.
   – Si (m, n) est un axiome alors (n, m) est aussi un axiome.
   – Supposons que (m, n) est un théorème et que (n, m) est aussi un théorème. Alors pour chacune des règles d'inférence le couple mirroir de la conclusion est un théorème car :

     Cas r_1. (nI, mI) est un théorème par application de la règle r_1.

     Cas r_2. (n, mII) est un théorème par application de la règle r_3.

     Cas r_3. (nII, m) est un théorème par application de la règle r_3.
4. L'ensemble des théorèmes du système est l'ensemble des couples (I^a, I^b) où a et b sont des entiers de parités différentes.
5. Il faut montrer que pour tout théorème est de la forme (I^a, I^b), où a et b n'ont pas même parité et que réciproquement pour tout couple (I^a, I^b) tel que a et b n'ont pas même parité, (I^a, I^b) est un théorème.
   (a) Prouvons par induction que tout théorème est de la forme (I^a, I^b) où a et b n'ont pas même parité.
      i. C'est vrai pour les axiomes car ils sont bien de cette forme puisque 0 est pair et 1 est impair.
      ii. Supposons que (m, n) est de la forme (I^a, I^b) où a et b n'ont pas même parité. Les trois règles d'inférence préservent cette forme et la différence de parité :
         – $(I^aI, I^bI) = (I^{a'}, I^{b'})$ avec $a' = a + 1$ et $b' = b + 1$.
         – $(I^aII, I^b) = (I^{a'}, I^{b'})$ avec $a' = a + 2$ et $b' = b$.
         – $(I^a, I^bII) = (I^{a'}, I^{b'})$ avec $a' = a$ et $b' = b + 2$.
   (b) Il faut démontrer que si a et b n'ont pas même parité alors (I^a, I^b) est un théorème. Si $a < b$ en appliquant a fois la règle r_1 on obtient (ϵ, I^{b-a}). Sinon de manière symétrique on obtient (I^{b-a}, ϵ). Comme a et b n'ont pas même parité $b - a$ est impair donc $b - a = 2k + 1$. Par k applications des règles r_2 ou r_3, on obtient (ϵ, I) ou (I, ϵ). On a bien des théorèmes puisque ces formules sont des axiomes.

III.

Les hypothèses sont :

1. $r \to (p \vee j) \equiv \overline{r} \vee p \vee j$
2. $\neg p \to (r \wedge c) \equiv p \vee (r \wedge c) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee c)$
3. $c \to (p \vee \neg j) \equiv \overline{c} \vee p \vee \overline{j}$

La conclusion est p donc sa négation est $\overline{p}$.
Voici une dérivation menant à $\perp$:
$\overline{r} \vee p \vee j,\ p \vee r,\ \mathbf{p} \vee \mathbf{c},\ \overline{c} \vee p \vee \overline{j},\ \overline{\mathbf{p}}$
$\overline{r} \vee p \vee j,\ \mathbf{p} \vee \mathbf{r},\ p \vee c,\ \overline{c} \vee p \vee \overline{j},\ \overline{\mathbf{p}},\ c$
$\overline{\mathbf{r}} \vee \mathbf{p} \vee \mathbf{j},\ p \vee r,\ p \vee c,\ \overline{c} \vee p \vee \overline{j},\ \overline{p},\ c,\ \mathbf{r}$
$\overline{r} \vee p \vee j,\ p \vee r,\ p \vee c,\ \overline{\mathbf{c}} \vee \mathbf{p} \vee \overline{\mathbf{j}},\ \overline{p},\ c,\ r,\ \mathbf{p} \vee \mathbf{j}$
$\overline{r} \vee p \vee j,\ p \vee r,\ p \vee c,\ \overline{c} \vee p \vee \overline{j},\ \overline{p},\ \mathbf{c},\ r,\ p \vee j,\ \overline{\mathbf{c}} \vee \mathbf{p}$
$\overline{r} \vee p \vee j,\ p \vee r,\ p \vee c,\ \overline{c} \vee p \vee \overline{j},\ \overline{\mathbf{p}},\ c,\ r,\ p \vee j,\ \overline{c} \vee p,\ \mathbf{p}$
$\overline{r} \vee p \vee j,\ p \vee r,\ p \vee c,\ \overline{c} \vee p \vee \overline{j},\ \overline{p},\ c,\ r,\ p \vee j,\ \overline{c} \vee p,\ p,\ \perp$

Le raisonnement est donc correct.