

Examen Mai 2010

Aucun document autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : résolution (6 points)

Soit l'énoncé suivant :

1. Les personnes qui ont la grippe ne doivent pas aller au travail.
2. Les personnes qui ont de la fièvre et qui toussent ont la grippe.
3. Ceux qui ont une température supérieure à 38° ont de la fièvre.
4. Pierre tousse et a une température supérieure à 38° .

On veut montrer en utilisant la méthode de la résolution que "Pierre ne doit pas aller au travail".

1. Modéliser en logique des prédicats l'énoncé ci-dessus en utilisant les prédicats suivants :
 - $\text{grippe}(x)$: x a la grippe
 - $\text{travail}(x)$: x doit aller au travail
 - $\text{fièvre}(x)$: x a de la fièvre
 - $\text{tousse}(x)$: x tousse
 - $\text{temp}(x, t)$: x a la température t
 - $\text{sup}(x, y)$: x est supérieur à yOn utilisera également les constantes suivantes :
 - 38
 - *Pierre*
2. Mettre sous forme préfixe les énoncés ainsi que la négation de la proposition à prouver.
3. Eliminer les quantificateurs.
4. Mettre le problème sous forme de clauses.
5. Montrer que "Pierre ne doit pas aller au travail" en utilisant la méthode de résolution avec variables en précisant les différentes étapes.

Exercice 2 : déduction naturelle (4 points)

Démontrer en utilisant la déduction naturelle le séquent suivant :

$$\vdash ((C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \vee B))$$

Exercice 3 : systèmes formels (7 points)

Considérons le système formel S suivant :

L'ensemble des formules est l'ensemble des triplets de mots non vides sur l'alphabet comportant une seule lettre "1". Un mot sur l'alphabet comportant une seule lettre "1" est simplement une juxtaposition de "1". Ainsi par exemple, les triplets suivants sont des formules : $(111, 11, 111)$, $(1, 1, 1)$, $(111, 1, 1111111)$...

On note 1^n le mot $111\dots 1$ comportant n fois 1.
 Le système formel comporte un seul axiome :

$$\frac{}{(1, 1, 11)}$$

Et un schéma de règles d'inférence :

$$\frac{(1^n, 1^m, 1^p)}{(1^{n+1}, 1^m, 1^{p+1})} \quad n > 0, m > 0 \text{ et } p > 0$$

1. Donner trois exemples de formules qui sont des théorèmes de ce système formel. Justifier en donnant la construction de la preuve.
2. Quelle est l'ensemble des formules qui sont des théorèmes de ce système formel ? justifier votre réponse.
3. Ce système formel est-il semi-décidable ? décidable ? justifier votre réponse.
4. Ce système formel est-il cohérent ? justifier votre réponse.
5. Proposer une définition de la validité des formules de ce système (\models) telle que ce système formel soit correct et complet vis-à-vis de cette définition et justifier votre réponse.
6. Supposons que l'on définit la validité de la manière suivante :
 On dit que $(1^n, 1^p, 1^q)$ est valide (noté $\models (1^n, 1^p, 1^q)$) ssi $n + p = q$.
 - (a) Le système formel S est-il correct pour cette définition de la validité ? justifier votre réponse et si ce n'est pas le cas proposer un système formel correct.
 - (b) Le système formel S est-il complet pour cette définition de la validité ? justifier votre réponse et si ce n'est pas le cas proposer un système formel complet.

Exercice 4 : prolog (3 points)

Définir un prédicat `last/2` tel que `last(X, L)` réussit ssi X est le dernier élément de la liste L .