Université de Strasbourg
Logique et Programmation Logique — Feuille de CT (Correction)

Examen Mai 2010

Aucun document autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : résolution (6 points)

Soit l'énoncé suivant :

1. Les personnes qui ont la grippe ne doivent pas aller au travail.
2. Les personnes qui ont de la fièvre et qui toussent ont la grippe.
3. Ceux qui ont une température supérieure à 38° ont de la fièvre.
4. Pierre tousse et a une température supérieure à 38°.

On veut montrer en utilisant la méthode de la résolution que "Pierre ne doit pas aller au travail".

1. Modèliser en logique des prédicats l'énoncé ci-dessus en utilisant les prédicats suivants :
   - $grippe(x)$: x a la grippe
   - $travail(x)$: x doit aller au travail
   - $fievre(x)$: x a de la fièvre
   - $tousse(x)$: x tousse
   - $temp(x, t)$: x a la température t
   - $sup(x, y)$: x est supérieur à y

   On utilisera également les constantes suivantes :
   - 38
   - $Pierre$

   Correction :

   (a) $\forall x, grippe(x) \Rightarrow \neg travail(x)$
   (b) $\forall x, fievre(x) \wedge tousse(x) \Rightarrow grippe(x)$
   (c) $\forall x\ t, temp(x, t) \wedge sup(t, 38) \Rightarrow fievre(x)$
   (d) $tousse(Pierre) \wedge \exists t, (temp(Pierre, t) \wedge sup(t, 38))$
   (e) $\neg\neg(travail(Pierre))$

   Remarque on peut aussi écrire :

   $$\forall x, (\exists t, temp(x, t) \wedge sup(t, 38)) \Rightarrow fievre(x)$$

   On obtiendra le même résultat en effet :

   $$\forall x, (\exists t, temp(x, t) \wedge sup(t, 38)) \Rightarrow fievre(x) \equiv$$

   $$\forall x, \neg(\exists t, temp(x, t) \wedge sup(t, 38)) \vee fievre(x) \equiv$$

   $$\forall x\ t, \neg temp(x, t) \vee \neg sup(t, 38) \vee fievre(x)$$

2. Mettre sous forme prénexe les énoncés ainsi que la négation de la proposition à prouver.

   Correction :

   (a) $\forall x, grippe(x) \Rightarrow \neg travail(x)$

(b) $\forall x, fievre(x) \wedge tousse(x) \Rightarrow grippe(x)$

(c) $\forall x\ t, temp(x,t) \wedge sup(t,38) \Rightarrow fievre(x)$

(d) $\exists t, tousse(Pierre) \wedge temp(Pierre,t) \wedge sup(t,38)$

(e) $\neg\neg(travail(Pierre))$

3. Eliminer les quantificateurs.

   Correction : Soit t_0 une nouvelle constante :

   (a) $grippe(x) \Rightarrow \neg travail(x)$

   (b) $fievre(x) \wedge tousse(x) \Rightarrow grippe(x)$

   (c) $temp(x,t) \wedge sup(t,38) \Rightarrow fievre(x)$

   (d) $tousse(Pierre) \wedge temp(Pierre,t_0) \wedge sup(t_0,38)$

   (e) $\neg\neg(travail(Pierre))$

4. Mettre le problème sous forme de clauses.

   Correction :

   (a) $\neg grippe(x) \vee \neg travail(x)$

   (b) $\neg fievre(x) \vee \neg tousse(x) \vee grippe(x)$

   (c) $\neg temp(x,t) \vee \neg sup(t,38) \vee fievre(x)$

   (d) $tousse(Pierre)$

   (e) $temp(Pierre,t_0)$

   (f) $sup(t_0,38)$

   (g) $travail(Pierre)$

5. Montrer que ”Pierre ne doit pas aller au travail” en utilisant la méthode de résolution avec variables en précisant les différentes étapes.

   Correction :

   (a) (g+a) $\neg grippe(Pierre)$

   (b) ((g+a)+b) $\neg fievre(Pierre) \vee \neg tousse(Pierre)$

   (c) (((g+a)+b)+d) $\neg fievre(Pierre)$

   (d) (c+e) $\neg sup(t0,38) \vee fievre(Pierre)$

   (e) ((c+e)+f) $fievre(Pierre)$

   (f) ((((g+a)+b)+d)+((c+e)+f)) $\perp$

Exercice 2 : déduction naturelle (4 points)

Démontrer en utilisant la déduction naturelle le séquent suivant :

$$\vdash ((C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \vee B))$$

Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B), C \vdash (C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash C} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash C \Rightarrow A}}{(C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B), C,\ C \Rightarrow A \vdash A}\,\text{Elim}\Rightarrow}{(C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B), C,\ C \Rightarrow A \vdash A \vee B}\,\vee\text{g} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash C} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash C \Rightarrow B}}{(C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B), C,\ C \Rightarrow B \vdash B}\,\text{Elim}\Rightarrow}{(C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B), C,\ C \Rightarrow B \vdash A \vee B}\,\vee\text{d}}{\dfrac{(C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B), C \vdash A \vee B}{(C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B) \vdash C \Rightarrow (A \vee B)}\,\text{Intro}\Rightarrow}\,\text{Elim}\vee}{\vdash ((C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \vee B))}\,\text{Intro}\Rightarrow$$

Exercice 3 : systèmes formels (7 points)

Considérons le système formel S suivant :

L'ensemble des formules est l'ensemble des triplets de mots non vides sur l'alphabet comportant une seule lettre "1". Un mot sur l'alphabet comportant une seule lettre "1" est simplement une juxtaposition de "1". Ainsi par exemple, les triplets suivants sont des formules : $(111, 11, 111)$, $(1, 1, 1)$, $(111, 1, 1111111) \ldots$

On note 1^n le mot $111...1$ comportant n fois 1.

Le système formel comporte un seul axiome :

$$\frac{}{(1, 1, 11)}$$

Et un schéma de règles d'inférence :

$$\frac{(1^n, 1^m, 1^p)}{(1^{n+1}, 1^m, 1^{p+1})}\ n > 0, m > 0 \text{ et } p > 0$$

1. Donner trois exemples de formules qui sont des théorèmes de ce système formel. Justifier en donnant la construction de la preuve.

   Correction :

$$\frac{}{(1, 1, 11)}$$

$$\frac{\frac{}{(1, 1, 11)}}{(11, 1, 111)}$$

$$\frac{\frac{\frac{}{(1, 1, 11)}}{(11, 1, 111)}}{(111, 1, 1111)}$$

2. Quelle est l'ensemble des formules qui sont des théorèmes de ce système formel ? justifier votre réponse.

   Correction : L'ensemble des théorèmes est l'ensemble des formules de la forme $(1^n, 1,^{n+1})$ avec $n > 0$.

   (a) Prouvons que toutes les formules de cette forme sont des théorèmes : En utilisant $n - 1$ applications de la règle d'inférence on obtient $(1, 1, 11)$ qui est l'axiome.

   (b) Prouvons que tous les théorèmes sont de cette forme par induction sur la structure des preuves :
   - Cas de base : c'est vrai pour l'axiome.
   - Induction : supposons que la prémisse de la règle est de cette forme, alors la conclusion est aussi de cette forme.

3. Ce système formel est-il semi-décidable ? décidable ? justifier votre réponse.

   Correction : Ce système formel est décidable et a fortriori semi-décidable car pour savoir si une formule est un théorème l'algorithme consiste à tester si elle est de la forme : $(1^n, 1,^{n+1})$ pour $n > 0$.

4. Ce système formel est-il cohérent ? justifier votre réponse.

   Correction : Ce système est cohérent car $(1, 1, 11)$ est un théorème et $(1, 111, 1)$ n'est pas un théorème.

5. Proposer une définition de la validité des formules de ce système ($\models$) telle que ce système formel soit correct et complet vis-à-vis de cette définition et justifier votre réponse.

   Correction : On peut dire qu'une formule $(1^n, 1^m, 1^p)$ est valide ssi $m = 1$ et $p = n + 1$. On a bien que tous les théorèmes sont des formules valides et réciproquement.

6. Supposons que l'on définit la validité de la manière suivante :
   On dit que $(1^n, 1^p, 1^q)$ est valide (noté $\models (1^n, 1^p, 1^q)$) ssi $n + p = q$.

   (a) Le système formel S est-il correct pour cette définition de la validité ? justifier votre réponse et si ce n'est pas le cas proposer un système formel correct.

   Correction : Le système est correct car tous les théorèmes sont des formules valides, en effet d'après la question 2 on connait l'ensemble des formules qui sont des théorèmes et c'est un sous-ensemble de l'ensemble des formules valides.

   (b) Le système formel S est-il complet pour cette définition de la validité ? justifier votre réponse et si ce n'est pas le cas proposer un système formel complet.

   Correction : Le système n'est pas complet car la formule $(1, 11, 111)$ est valide mais n'est pas un théorème. Pour rendre le sytème complet il faut rajouter la règle :

$$\frac{(1^n, 1^m, 1^p)}{(1^n, 1^{m+1}, 1^{p+1})}\ n > 0,\ m > 0 \text{ et } p > 0$$

Exercice 4 : prolog (3 points)

Définir un prédicat `last/2` tel que $last(X, L)$ réussit ssi X est le dernier élément de la liste L.

Correction :

```
last(X,[X]).
last(X,[_|L]) :- last(X,L).
```