UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR STRASBOURG

Département d'Informatique

LICENCE 2ème année
Contrôle continu de Logique
Lundi 1 décembre 2008
Durée : 1h30

Les notes de cours et des travaux dirigés sont autorisées.

Dans toute la suite $\mathbb{F}_n$ est l'ensemble des fonction booléennes de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}$ où $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ et pour $f \in \mathbb{F}_n$, $\mathcal{S}_f$ est le support de la fonction f (i.e. $\mathcal{S}_f = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{B}^n \mid f(\vec{\mathbf{x}}) = 1\}$).

1 Vrai/Faux

Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse en justifiant vos réponses :

1. Le nombre de fonctions booléennes de $\mathbb{F}_n$ est égal à 2^{2^n}.
2. Si f et g sont des fonctions booléennes alors $\mathcal{S}_{f \Longrightarrow g} \subseteq \mathcal{S}_f \cup \mathcal{S}_g$.
3. Tout sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$ est récursif.
4. Il existe des systèmes formels avec un nombre fini de théorèmes.
5. Toute expression booléenne non valide est insatisfiable.
6. Il existe une expression booléenne non valide est satisfiable.

2 Simplification

En utilisant la méthode du diagramme de Kranaugh ou la méthode de Quine, déterminer les monômes maximaux et les monômes centraux de la fonction booléenne $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} + \overline{x_2}\,\overline{x_3} x_4}$. En déduire les formes simplifiées de f.

3 Fonctions booléennes symétriques

Une fonction booléenne f de $\mathbb{F}_n$ est dite symétrique si pour toute permutation σ de $\{1, 2, ..., n\}$ $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{B}^n$ *(i.e. Une permution de* $\{1, 2, ..., n\}$ *est une bijection de* $\{1, 2, ..., n\}$ *dans* $\{1, 2, ..., n\}$*)*.
Par exemple, pour $n = 2$, f est symétrique si et seulement si pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{B}^n$, $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$.
Notation : Soit $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, alors $|\vec{\mathbf{x}}|$ est le nombre d'occurrences de 1 dans le vecteur $\vec{\mathbf{x}}$.
Par exemple, pour $n = 5$, $|(0, 1, 1, 0, 1)| = 3$

1. Donnez un exemple d'une fonction booléenne symétrique de $\mathbb{F}_2$.
2. Montrez que pour une fonction symétrique de $\mathbb{F}_n$, pour tout $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}' \in \mathbb{B}^n$ tels que $|\vec{\mathbf{x}}| = |\vec{\mathbf{x}}'|$, $\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}_f$ si et seulement si $\vec{\mathbf{x}}' \in \mathcal{S}_f$.
3. Déduire de la question précédente, le nombre de fonctions symétriques de $\mathbb{F}_n$.
4. Montrez que si f et g sont des fonctions symétriques alors $f + g$, $f.g$ et $\neg f$ le sont aussi.
5. Montrez qu'il existe $n + 1$ éléments de $\mathbb{B}^n$ tels qu'une fonction symétrique de $\mathbb{F}_n$ est complètement caractérisée par ses valeurs sur ces $n + 1$ points.