UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Département d'Informatique
LICENCE 2ème année
Mercredi 10 avril 2013
Logique et Programmation Logique

Contrôle continu

Les notes de cours et des travaux dirigés sont autorisées.

Dans toute la suite $\mathbb{F}_n$ est l'ensemble des fonction booléennes de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}$ où $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ et pour $f \in \mathbb{F}_n$, $\mathcal{S}_f$ est le support de la fonction f (i.e. $\mathcal{S}_f = \{\overrightarrow{\varepsilon} \in \mathbb{B}^n \mid f(\overrightarrow{\varepsilon}) = 1\}$).

I. Vrai/Faux

Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse en justifiant vos réponses :

1. Le nombre de monômes conjonctifs sur n variables est égal à 3^n.
2. Si f et g sont des fonctions booléennes, alors $\mathcal{S}_f \cap \mathcal{S}_g \subseteq \mathcal{S}_{f \iff g}$.
3. Tout monôme central est maximal.
4. Il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$.
5. Toute expression booléenne non valide est insatisfiable.
6. Il existe une expression booléenne non valide est satisfiable.

II. Expressions valides, satisfiables, insatisfiable

Déterminez parmis les trois expressions de CP0 suivantes, laquelle est valide, laquelle qui est satisfiable et laquelle qui est insatisfiable :

1. $(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r))$
2. $(((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow q$
3. $(p \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow \neg((p \wedge q) \Rightarrow q)$

III. Résolution Sans Variable (RSV)

Un club est régi par le réglement suivant :

1. Tout membre non écossais porte des chaussettes oranges.
2. Tout membre porte un kilt ou ne porte pas des chaussettes oranges.
3. Les membres mariés ne sortent pas le dimanche.
4. Un membre sort le dimanche si et seulement si il est écossais.
5. Tout membre qui porte un kilt est écossais et marié.
6. Tout membre écossais porte un kilt.

1. Exprimer ce réglement au moyen de clauses de la logique propositionnelle en utilisant les variables propositionnelles :
   - e : “Le membre est éccossais".
   - k : “Le membre porte un kilt".
   - o : “Le membre porte des chaussettes orangese".
   - m : “Le membre est marié".
   - d : “Le membre sort le dimanche".
2. Montrer qu'il est impossible d'adhérer au club en utilisant le méthode de résolution par coupure.

IV. Fonctions croissantes

Une fonction $f \in \mathbb{F}_n$ est dite croissante si pour tout $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n), (\varepsilon'_1, ..., \varepsilon'_n) \in \mathbb{B}^n$ si $\varepsilon_i \leq \varepsilon'_i$ pour tout i entre 1 et n, alors $f(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \leq f(\varepsilon'_1, ..., \varepsilon'_n)$.

1. Donnez toutes les fonctions croissantes de $\mathbb{F}_2$.
2. Soit m un entier inférieur ou égal à n et $f_m \in \mathbb{F}_n$ tel que $f_m(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = 1$ si et seulement si au moins m parmi les $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ valent 1. Montrez que f_m est croissante.
3. Trouvez une écriture minimale sous forme conjonctive disjonctive de f_m.