Département d'Informatique
LICENCE 2ème année
Mercredi 25 novembre 2009
Logique

Contrôle continu

Les notes de cours et des travaux dirigés sont autorisées.

Dans toute la suite $\mathbb{F}_n$ est l'ensemble des fonction booléennes de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}$ où $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ et pour $f \in \mathbb{F}_n$, $\mathcal{S}_f$ est le support de la fonction f (i.e. $\mathcal{S}_f = \{\varepsilon \in \mathbb{B}^n \mid f(\varepsilon) = 1\}$).

I. Vrai/Faux

Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse en justifiant vos réponses :

1. Le nombre de monômes conjonctifs sur n variables est égal à 3^n.
2. Si f et g sont des fonctions booléennes, alors $\mathcal{S}_f \cap \mathcal{S}_g \subseteq \mathcal{S}_{f \iff g}$.
3. Tout monôme central est maximal.
4. Il existe un ensemble récursif qui n'est pas récursivement énumérable.
5. Tout sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$ est récursivement énumérable mais pas récursif.
6. Il existe un système formel avec un seul théorème.

II. Simplification

Simplifier la fonction booléenne suivante en utilisant le diagrame de Karnaugh ou la méthode de Quine :

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1x_2\overline{x}_3x_4.$

III. Fonctions autoduales

Soit $f \in \mathbb{F}_n$ on appelle duale de f la fonction $f^\star$ telle que

$$f^\star(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)}.$$

Une fonction f est dite autoduale si $f^\star = f$.

1. Calculer les duales des fonctions booléennes : $x \mapsto x$, $x \mapsto \overline{x}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ et $(x_1, x_2) \mapsto Nand_2(x_1, x_2)$.
2. Donnez une fonction de $\mathbb{F}_2$ qui soit autoduale.
3. Montrer que pour toute fonction booléenne f on a : $(f^\star)^\star = f$.
4. Soit $f \in \mathbb{F}_n$. On considère l'application de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}^n$ définie par
$$\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \mapsto \overline{\varepsilon} = (\overline{\varepsilon}_1, ..., \overline{\varepsilon}_n).$$
Montrer que f est autoduale si et seulement si elle vérifie
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{B}_n, (\varepsilon \in \mathcal{S}_f \iff \overline{\varepsilon} \notin \mathcal{S}_f).$$
5. Déduire de la question précédente le nombre de fonctions autoduales dans $\mathbb{F}_n$.