Théorie des Graphes : Contrôle Terminal

Durée : 1 heure

Responsable : Prof. Christian RONSE

Documents et calculettes autorisés

Téléphones et autres moyens de communication interdits

Justifiez soigneusement vos réponses !

(1) Tri topologique

On a un graphe orienté simple avec sommets notés de a à g, et les arcs sont donnés en associant à chaque sommet la liste de ses successeurs (formant son voisinage sortant) :

a : b, c, d, e. (il y a un arc de a vers b, de a vers, c, etc.)
b : g.
c : f.
d : f.
e : g.
f : g.
g : . (il n'y a aucun arc sortant de g.)

Questions :

(i) Dessiner ce graphe sous forme de graphe planaire aux arcs rectilignes.

(ii) En supposant qu'on accède aux sommets dans l'ordre de a à g, faire un parcours en profondeur sur ce graphe, et donner le numéro de début et de fin de chaque sommet.

(iii) En utilisant (ii), faire un tri topologique de ce graphe.

(2) Parcours en largeur

On considère le cube unité $[0,1]^3$ dans $\mathbb{R}^3$, on en fait un graphe non orienté simple dont les sommets sont les 8 sommets du cube, et les arêtes correspondent aux 12 arêtes du cube.

Questions :

(i) Dessiner ce graphe, aligné sur le repère OXYZ, en notant abc le sommet de coordonées (a, b, c) pour $a, b, c \in \{0, 1\}$.

(ii) En supposant qu'on accède aux sommets voisins d'un sommet donné, d'abord suivant l'axe des X, puis suivant l'axe des Y, et enfin suivant l'axe des Z, faire un parcours en largeur de ce graphe à partir de la racine donnée par le sommet 000 (l'origine $(0, 0, 0)$). Donner l'ordre de passage des sommets dans la file, dessiner l'arborescence obtenue, et préciser pour chaque sommet la valeur de distance à la racine.

(3) Couplage

Décomposer la matrice suivante en une somme de matrices de permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$