Université de Strasbourg — **UFR de Mathématiques et Informatique**
L3 Informatique et CMI S5 — **2019-2020, semestre d'automne**

Graphes

Contrôle Continu n°1, 25 octobre 2019

Durée : 45 minutes
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents en papier autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses !

(1) Cycle élémentaire dans un graphe biparti.
On considère un graphe *non orienté simple biparti* G, avec les deux parties S_1 et S_2 de l'ensemble de sommets telles que toute arête a une extrémité dans S_1 et l'autre dans S_2. Soient $n = card\, S_1$ et $m = card\, S_2$, avec $n \geq m \geq 2$.

Questions :

(i) Donner la longueur maximum d'un cycle élémentaire de G.

(ii) Pour $S_1 = \{p_1, \ldots, p_n\}$ et $S_2 = \{q_1, \ldots, q_m\}$, $n \geq m \geq 2$, décrire (sans dessiner, en spécifiant les extrémités des arêtes) un tel cycle élémentaire ayant cette longueur maximum.

(2) Longueur de cycle.
Un graphe *non orienté* a 12 sommets, dont 8 de degré 5 et 4 de degré 3. Quelle est la longueur maximum d'un cycle ? (Indication : considérer le sous-graphe partiel engendré par ce cycle.)

(3) Composantes connexes et degrés.
On considère un graphe *non orienté simple* ayant n sommets. Pour tout sommet p, on écrit $d(p)$ pour le degré de p et $c(p)$ pour le nombre de sommets de la composante connexe contenant p. Soient d_{min} et d_{max} le minimum et le maximum parmi les degrés des sommets :

$$d_{min} = \min\{d(p) \mid p \in S\} \quad \text{et} \quad d_{max} = \max\{d(p) \mid p \in S\} \ .$$

Questions :

(i) Pour un sommet p, donner une inégalité liant $d(p)$ et $c(p)$.

(ii) Supposons le graphe non connexe, et soient p et q deux sommets appartenant à des composantes connexes distinctes. Donner une borne supérieure pour $d(p) + d(q)$; cette borne dépend de n. (Utiliser (i).)

(iii) Montrer que si $d_{min} + d_{max} \geq n - 1$, alors le graphe est connexe. (Par contradiction, en utilisant (ii).)