Université de Strasbourg **UFR de Mathématiques et Informatique**
L2 Informatique S4 **2015-2016, semestre de printemps**

Graphes

Contrôle Continu n°3, 6 mai 2016

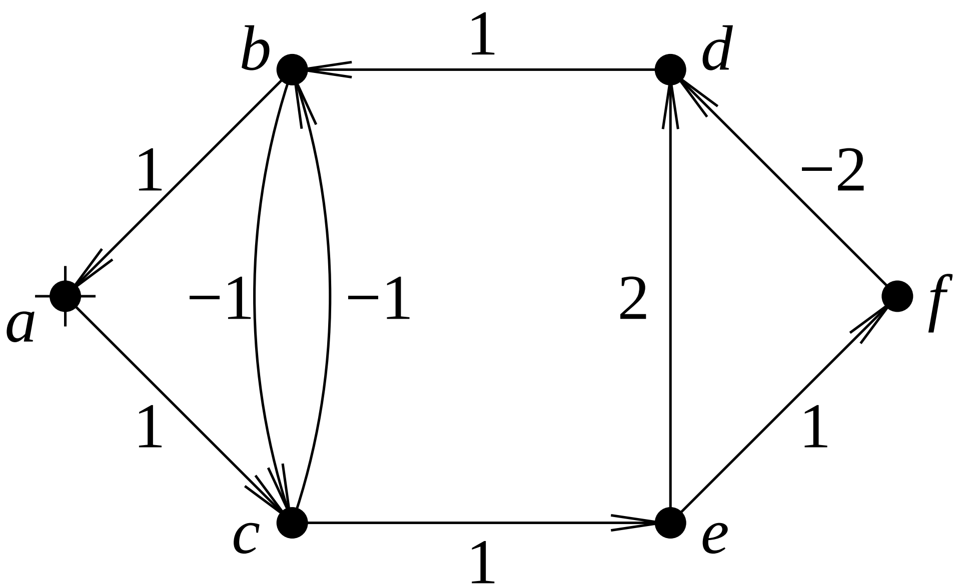
Durée : 1 heure 30 minutes
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents en papier autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses !

(1) Arborescence et distances depuis une racine.
Dans le graphe orienté pondéré ci-dessous, on prend la racine a (marquée d'une croix). Construire l'arborescence et les distances de la racine à tous les sommets au moyen de l'algorithme de Bellman-Ford, où à chaque étape l'ordre d'examen (et relaxation) des sommets est:

$$(b, a) \ ; \ (b, c) \ ; \ (d, b) \ ; \ (a, c) \ ; \ (f, d) \ ; \ (c, b) \ ; \ (c, e) \ ; \ (e, d) \ ; \ (e, f) \ .$$

Le graphe a-t-il un cycle de longueur < 0 ; ?



(2) Hauteurs et dénivelés par Floyd-Warshall.
On considère un graphe orienté simple pondéré, où le poids de toute arc est non-négatif: $\forall a \in A,\ p(a) \geq 0$. On définit la hauteur $H(C)$ d'un chemin C comme le *maximum* des poids des arcs de C:

$$C = s_0, s_1, \ldots, s_{m-1}, s_m \implies H(C) = \max\bigl\{p(s_0, s_1), \ldots, p(s_{m-1}, s_m)\bigr\} \ .$$

Pour un chemin sans arc, donc réduit à un sommet s, la hauteur vaut 0: $H(s) = 0$. Pour deux sommets s, s', on définit le *dénivelé* $D(s, s')$ de s ver s' comme la hauteur minimum d'un chemin d'origine s et de but s', s'il existe ; si un tel chemin n'existe pas, on pose le dénivelé infini, $D(s, s') = \infty$.

(i) Si le but du chemin C_1 est l'origine du chemin C_2, exprimer la hauteur de la concaténation C_1C_2 en termes des hauteurs de C_1 et de C_2.

(ii) En supposant n sommets numérotés $1, \ldots, n$, expliquer comment adapter l'algorithme de Floyd-Warshall (avec les $D_{ij}^{(k)}$) pour calculer la matrice $n \times n$ des dénivelés $D(i, j)$, $1 \leq i, j \leq n$.

(iii) Que peut-on dire de $D_{ii}^{(k)}$ $(0 \leq k \leq n,\ 1 \leq i \leq n)$, de $D_{ik}^{(k)}$ $(1 \leq i, k \leq n)$ et $D_{kj}^{(k)}$ $(1 \leq j, k \leq n)$ dans l'algorithme adapté ?

[Pour rappel, $D_{ij}^{(k)}$ $(0 \leq k \leq n,\ 1 \leq i, j \leq n)$ donne la longueur (maintenant, la hauteur) minimum d'un chemin d'origine i et de but j où les éventuels sommets intermédiaires sont de numéro $\leq k$, si un tel chemin existe ; si un tel chemin n'existe pas, $D_{ij}^{(k)} = \infty$.]

(3) Modélisation par flot.

On a m clubs $C_1, \ldots, C_m$ et n personnes $P_1, \ldots, P_n$. Chaque club a plusieurs membres, et une personne peut être membre d'un ou plusieurs clubs. Chaque club doit désigner un(e) délégué(e), choisi(e) parmi ses membres, au congrès des clubs. La règle de parité exige que parmi les délégué(e)s au congrès, la proportion de femmes soit entre 40% et 60%. Modéliser ce problème par un un flot sur réseau de transport (préciser les sommets, arcs et capacités) et donner les conditions que doit satisfaire le flot.