

Graphes

Contrôle Continu n°1, 10 mars 2015

Durée : 1 heure

Responsable : Prof. Christian RONSE

Tous documents en papier autorisés mais non partagés

Calculatrices inutiles

Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses !

NB. Les graphes seront toujours supposés **finis**, c.-à-d. avec un nombre fini de sommets et un nombre fini d'arêtes.

(1) Parité des degrés.

On considère un graphe non orienté à n sommets, $n \geq 1$.

- (i) Peut-on avoir un nombre impair de sommets de degrés impair ?
- (ii) Soit k un entier tel que $0 \leq 2k \leq n$. Montrer comment construire un graphe non orienté simple à n sommets ayant exactement $2k$ sommets de degré impair. (*Indication* : partir du graphe complet K_n et enlever certaines arêtes, la solution dépend de la parité de n).

(2) Cycle unique.

On considère un graphe non orienté à n sommets, $n \geq 1$, *connexe* et *possédant exactement un cycle*.

- (i) Quelles arêtes peut-on enlever sans déconnecter le graphe ? Combien peut-on en enlever ?
- (ii) Combien d'arêtes le graphe a-t-il ?

(3) Graphe eulérien par ajout.

Soit G un graphe orienté connexe. Montrer que si G n'est pas eulérien, alors on peut obtenir un graphe eulérien (c.-à-d. ayant un circuit eulérien) en rajoutant à G un sommet supplémentaire et des arcs dont les extrémités sont un sommet de G et ce nouveau sommet.