Université de Strasbourg **UFR de Mathématiques et Informatique**
L3 Informatique S5 **2019-2020, semestre d'automne**

Graphes

Exercices de TD, automne 2019

Responsable : Prof. Christian RONSE

NB. *Les graphes seront toujours supposés* **finis***, c.-à-d. avec un nombre fini de sommets et un nombre fini d'arêtes.*

(1) 3 connaissances ou 3 non-connaissances parmi 6.
Il s'agit de montrer que parmi 6 personnes (ou plus), il y en a toujours soit 3 qui ne se connaissent pas l'une l'autre, soit 3 qui se connaissent l'une l'autre.

Supposons un graphe non orienté simple G tel qu'il n'y a ni 3 sommets distincts mutuellement adjacents, ni 3 sommets distincts mutuellement non-adjacents. Pour un sommet x, soit $\Gamma(x)$ le voisinage de x et $\overline{\Gamma}(x) = S \setminus (\Gamma(x) \cup \{x\})$ l'ensemble des sommets différents de x et non voisins de x.

(i) Comment est le sous-graphe engendré par $\Gamma(x)$? Quelles arêtes y a-t-il ?

(ii) Montrer que $card(\Gamma(x)) \leq 2$.

(iii) Comment est le sous-graphe engendré par $\overline{\Gamma}(x)$? Quelles arêtes y a-t-il ?

(iv) Montrer que $card(\overline{\Gamma}(x)) \leq 2$.

(v) En déduire une contradiction pour $card(S) \geq 6$.

(vi) Donner un exemple d'un tel graphe pour $card(S) = 5$.

(2) Graphe sans triangle.
Appelons *sans triangle* un graphe non orienté simple n'ayant pas 3 sommets mutuellement adjacents (c.-à-d. sans clique de taille 3).

(i) Un graphe biparti est-il sans triangle ?

(ii) Donner le nombre de sommets et d'arêtes des graphes bipartis complets $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ pour n pair et $K_{\frac{n+1}{2},\frac{n-1}{2}}$ pour n impair.

(iii) Soit G un graphe sans triangle à $n+2$ sommets, et soient x et y deux sommets (distincts) adjacents. Que peut-on dire de $\Gamma(x) \setminus \{y\}$ et $\Gamma(y) \setminus \{x\}$? Dans quoi sont-ils inclus ? Qu'est leur intersection ?

(iv) Montrer que dans la situation (iii), le nombre d'arêtes ayant une extrémité dans $S \setminus \{x, y\}$ et l'autre dans $\{x, y\}$ est au plus n.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $T(n)$ le nombre maximum d'arêtes d'un graphe sans triangle à n sommets.

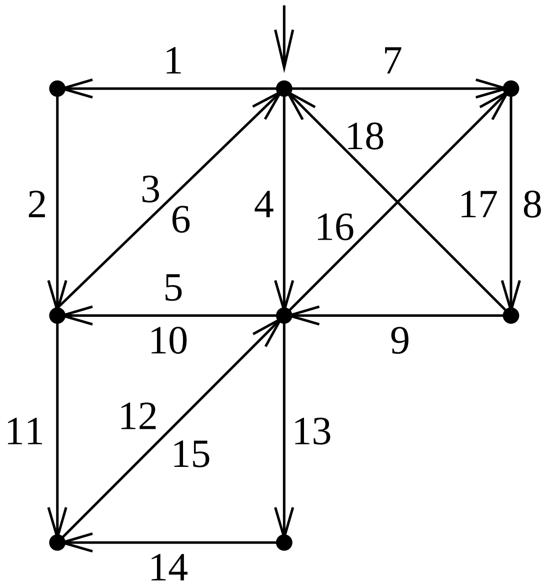
(v) Montrer que $T(n+2) \leq T(n) + n + 1$.

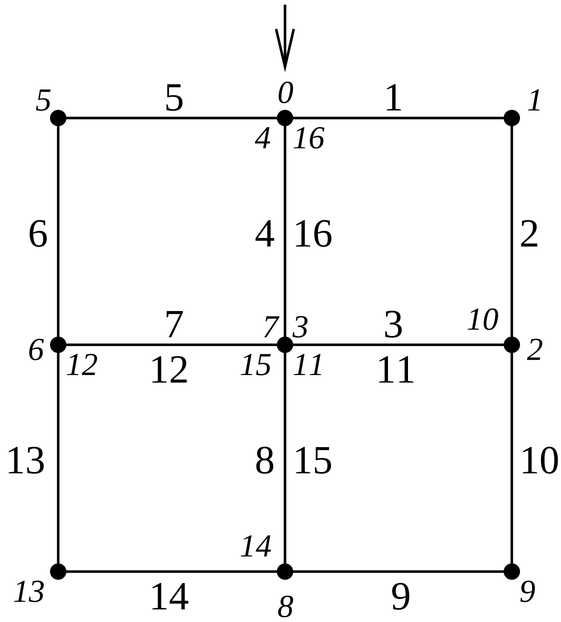
(vi) Montrer par récurrence que pour n pair on a $T(n) \leq \frac{n^2}{4}$ et que pour n impair on a $T(n) \leq \frac{n^2-1}{4}$.

(vii) Vérifier que les bornes données en (vi) pour $T(n)$ sont effectivement atteintes, donc que $T(n) = \frac{n^2}{4}$ pour n pair et $T(n) = \frac{n^2-1}{4}$ pour n impair.

(3) Circuits.

Décomposer le chemin fermé ci-dessous à gauche en circuits élémentaires (le sommet extrémité initale et terminale est indiqué par une flèche).



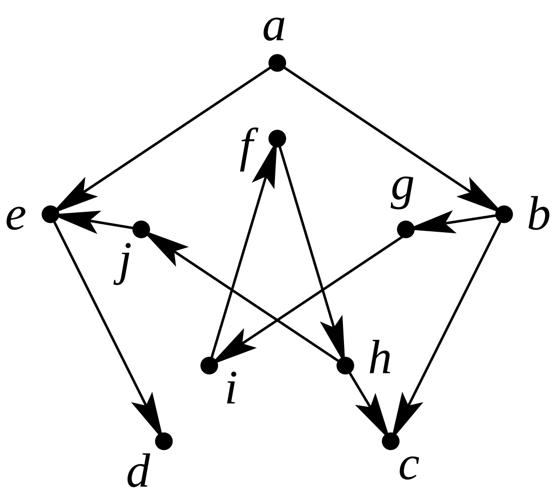


(4) Cycles.

Décomposer la chaîne fermée ci-dessus à droite en cycles élémentaires et en pseudo-cycles de longueur 2 (le sommet extrémité initale et terminale est indiqué par une flèche).

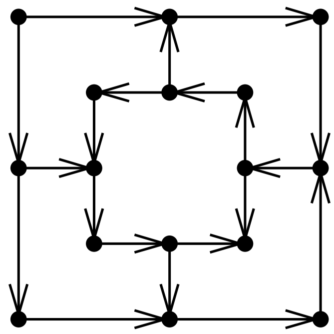
(5) Tri topologique.

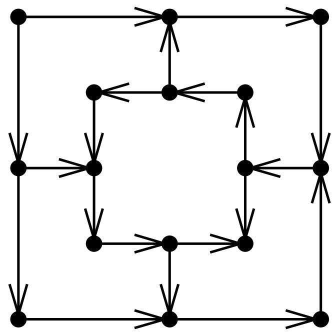
Faire un tri topologique du graphe orienté suivant au moyen de l'algorithme basé sur le parcours en profondeur.



(6) Composantes fortement connexes.

Construire les composantes fortement connexes du du graphe orienté suivant (dessiné deux fois) au moyen de l'algorithme basé sur deux parcours en profondeur.

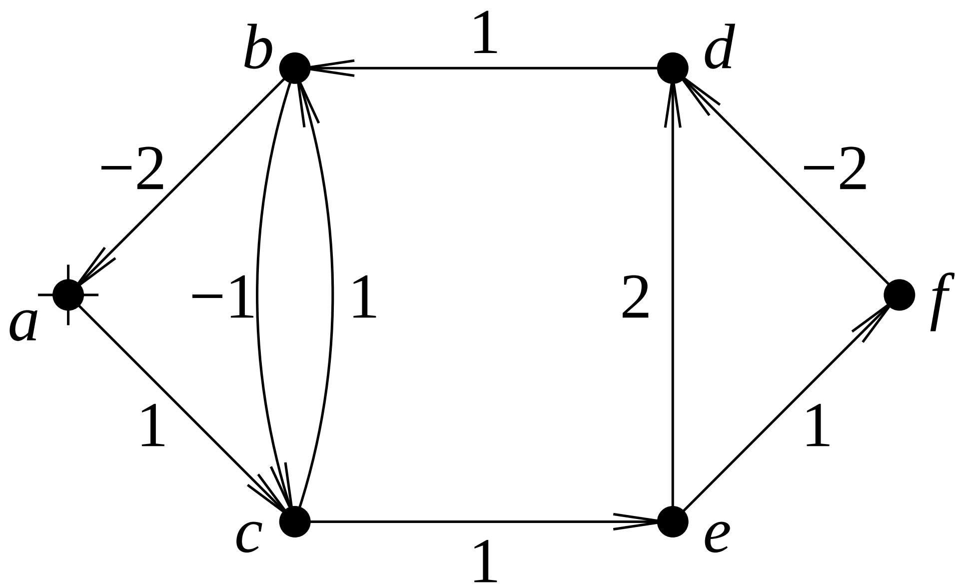




(7) Arborescence et distances depuis une racine.
Dans le graphe orienté pondéré ci-dessous, on prend la racine a (marquée d'une croix). Construire l'arborescence et les distances de la racine à tous les sommets au moyen de l'algorithme de Bellman-Ford, où à chaque étape l'ordre d'examen (et relaxation) des arcs est (pour simplifier, un arc d'origine x et de but y est ici écrit xy):

$$ba \ ; \ bc \ ; \ db \ ; \ ac \ ; \ fd \ ; \ cb \ ; \ ce \ ; \ ed \ ; \ ef \ .$$

Le graphe a-t-il un cycle de longueur < 0 ; ?



(8) Fermeture transitive d'une relation.
Soit $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et R une relation binaire sur E. La fermeture transitive de R s'obtient par une variante de l'algorithme de Floyd-Warshall.

Initialisation : $S = R$.

Récursion : (ici $\neg$ désigne la négation logique)

Pour k allant de 1 à n faire
Pour i allant de 1 à n faire
Pour j allant de 1 à n faire

SI ($x_i \neg S\, x_j$ ET $x_i\, S\, x_k$ ET $x_k\, S\, x_j$) ALORS poser $x_i\, S\, x_j$.

Fin : On retourne S, qui donne la fermeture transitive de R.

Exercice : Appliquer l'algorithme à une relation R donnée par une matrice $n \times n$ binaire $R_{i,j}$, où $R_{i,j} = 1$ si $x_i \, R \, x_j$ et $R_{i,j} = 0$ si $x_i \, \neg R \, x_j$.

$$n = 3 : \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad n = 4 : \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) Flot maximum.

Pour $n \geq 3$, le réseau de transport R_n est construit à partir d'un graphe orienté simple à n sommets, parmi lesquels on distingue une source et un puits, ayant un arc reliant chaque couple de sommets distincts, excepté ceux dont l'origine est le puits et ceux dont le but est la source ; on associe à chaque arc une capacité égale à 1. En d'autres termes, $R_n = (S_n, A_n, s, p, c)$, où l'ensemble de sommets est $S_n = \{x_1, \ldots, x_{n-2}, s, p\}$ (s étant la source et p et le puits), et l'ensemble des arcs est

$$A_n = \{(u, v) \mid u, v \in S_n, \ p \neq u \neq v \neq s\} \ ,$$

avec $c(u, v) = 1$ pour chaque $(u, v) \in A$.

(i) Donner le cardinal de A_n.

(ii) Dessiner R_n pour $n = 3$ et $n = 4$, et appliquer la méthode de Ford-Fulkerson pour obtenir un flot maximum.

(iii) Montrer que pour tout $n \geq 3$, R_n a un flot de valeur $n - 1$ utilisant $2n - 3$ arcs. Montrer ensuite qu'il est maximum, par l'absence de chemin augmentant.