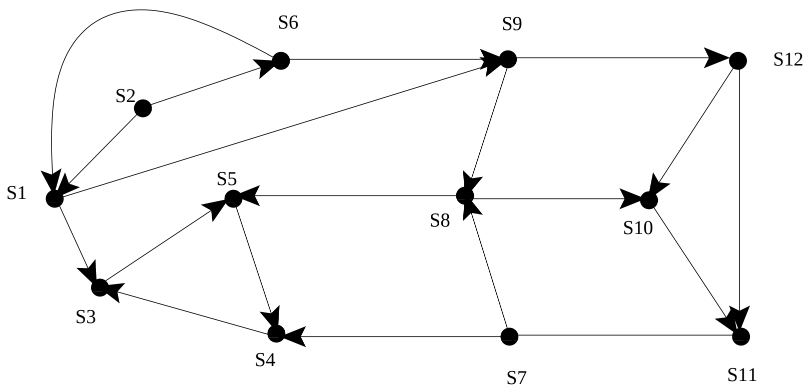
UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Département d'Informatique
LICENCE 2ème année
Contrôle continu : Graphes
Mardi 8 avril 2014

Exercice I

Soit $G = (S, A)$ un graphe et soit S_r l'ensemble des composante fortement connexes de G. Sur S_r on définit le graphe $G_r = (S_r, A_r)$ tel que $(c, c') \in A_r$ s'il existe $x \in C$ et $x' \in C'$ tel que $(x, x') \in A$. G_r est appelé le graphe réduit associé au graphe G.
Le graphe G est dit complet si $\forall x, x' \in S$, on a $\quad (x, x') \in A \quad$ ou $\quad (x', x) \in A$.

1. Construire le graphe réduit associé au graphe suivant :



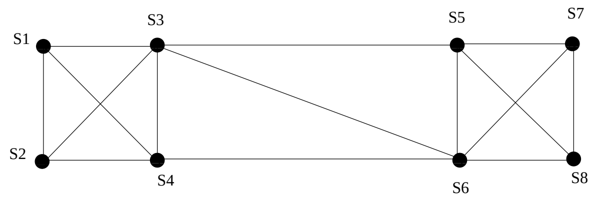
2. Soit G un graphe complet. Montrer que dans ce cas le graphe réduit G_r est complet et correspond à une relation d'ordre totale.
3. Montrer que si G est un graphe complet, alors il existe un sommet x_0 de G tel que pour tout sommet y de G, il existe un chemin dans G allant de x_0 à y.
4. Montrer que si un graphe G est complet et n'est pas fortement connexe, alors il suffit de lui ajouter un seul arc pour qu'il soit fortement connexe.

Exercice II

1. Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté simple connexe. On appelle sommet de coupure de G tout sommet x de G tel que si on retire x à G le graphe résultant n'est plus connexe.

   (a) Montrer qu'un sommet x de G est sommet de coupure si et seulement si il existe deux sommets y et z de G tels que toute chaîne allant de y à z passe nécessairement par x.

   (b) Montrer que deux sommets au moins de G ne sont pas des points de coupure.
2. On appelle indice de connexité par sommet, le nombre $\pi(G)$ minimum de sommets qu'il faut retirer à G pour le disconnecter ou le réduire à un point.
   On appelle indice de connexité par arc le nombre $\alpha(G)$ minimum d'arc qu'il faut retirer à G pour le disconnecter.



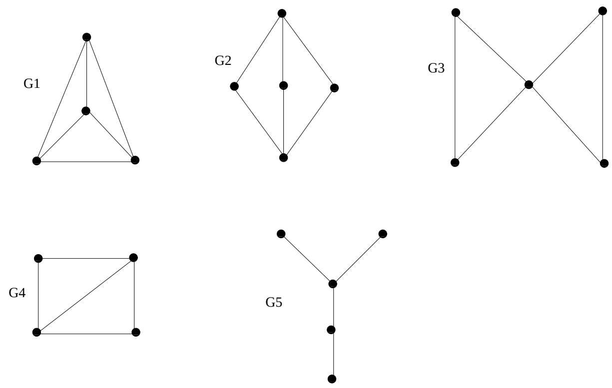
(a) Trouver $\pi(G)$ et $\alpha(G)$ pour le graphe suivant :

(b) Montrer que $\alpha(G) \leq \pi(G) \leq Card(S) - 1$.

Exercice III

Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté simple. On appelle dual de G le graphe $G^* = (S', A')$ où $S' = A$ et A' est défini par $(\{x, y\}, \{z, t\}) \in A'$ si $\{x, y\} \cap \{z, t\} \neq \emptyset$. Autrement dit les deux arêtes $\{x, y\}, \{z, t\}$ sont adjacentes.

1. Construire le dual des graphes suivants :



2. On suppose G eulérien. Montrer que G^* est à la fois eulérien et hamiltonien.
3. On suppose que G est hamiltonien. Montrer que G^* est hamiltonien.