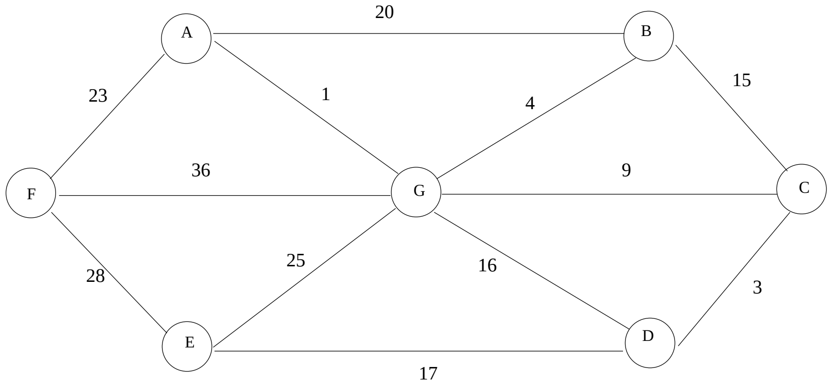
Département d'Informatique
LICENCE 2ème année
Contrôle continu : Graphes et Recherche Opérationnelle
Vendredi 26 avril 2013

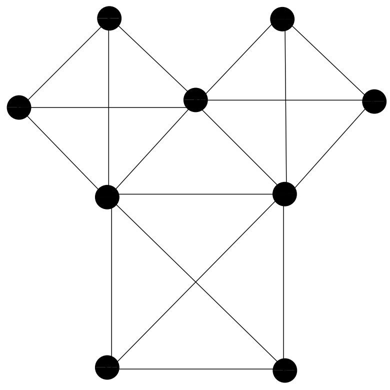
Exercice I

En utilisant l'algorithme de Kruscal, trouver un arbre de recouvrement minimal du graphe suivant :



Exercice II

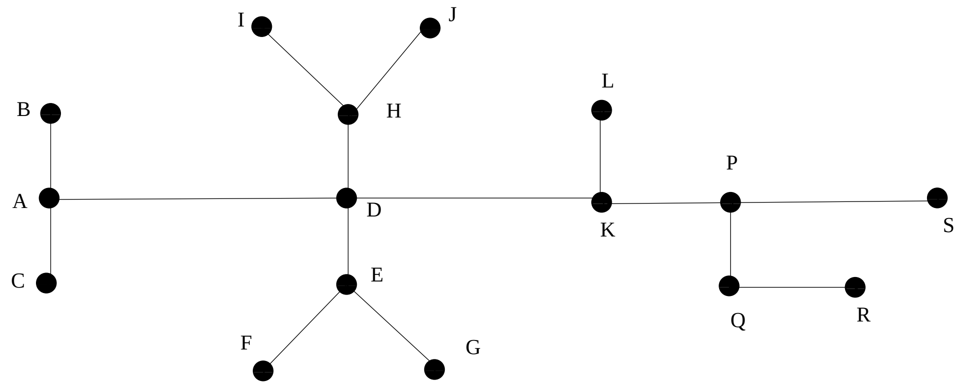
Trouvez une chaîne eulerienne pour le graphe suivant :



Exercice III

Soit $G = (S, A)$ un arbre. Pour deux sommets x, y quelconques de G, si C est 'la' chaîne élémentaire joignant x et y dans G on pose $d(x, y)$ égal à la longueur de C.

1. Montrer que d est une distance sur S, autrement dit : pour tout $x, y, z \in S$ on a
   - $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
   - $d(x, y) = d(y, x)$.
   - $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.
2. L'excentricité d'un sommet x est par définition $ex(x) = \sup_{y \in S}(d(x, y))$.
   Calculer la fonction ex pour chacun des sommets du graphe suivant :



3. Le rayon de G est par définition $r(G) = \inf_{x \in S}(ex(x))$. $x \in S$ est dit un centre pour G si $ex(x) = r(G)$.
   (a) Calculer le rayon et 'les' centres de l'arbre ci-dessus.
   (b) Montrer qu'un arbre a soit un centre unique soit deux centres adjacents.

Exercice IV

Une suite décroissante $(d_1, d_2, ..., d_n)$ d'entiers positifs est dite graphique s'il existe un graphe simple non-orienté G ayant n sommets $s_1, s_2, ..., s_n$ tels que $d(s_i) = d_i$ pour tout i entre 1 et n.

1. Dire si les séquences suivantes sont graphiques ou pas en justifiant vos réponses :
   (a) $(3, 3, 2, 2, 2)$.
   (b) $(4, 3, 3, 2, 1)$.
2. Soit $(d_1, d_2, ..., d_n)$ une suite décroissante d'entiers positifs tel que $d_1 \neq 0$. Dans toute la suite on admettra la propriété suivante :

   $(d_1, d_2, ..., d_n)$ est graphique $\iff$ $TD(d_2-1, d_3-1, ..., d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, ..., d_n)$ est graphique

   où $TD(y_1, y_2, ..., , .., y_m)$ est la séquences obtenue à partir de la séquence d'entiers positifs $(y_1, y_2, ..., , .., y_m)$ par un trie décroissant.
   Remarque : On a en particulier nécessairement $d_{d_1+1} \geq 1$.
   (a) Proposer un algorithme qui permet de tester si une séquence est graphique ou pas et justifier la terminaison de votre algorithme.
   (b) Appliquer votre algorithme pour vérifier pour chacune des séquences suivantes s'elle est graphique ou pas et en donnant dans le cas où elle est graphique un graphe correspondant à cette séquence :
      i. $(6, 4, 4, 4, 4, 2, 2)$.
      ii. $(5, 5, 5, 5, 4, 2, 2, 2, 2)$.
      iii. $(4, 4, 3, 2, 1, 0)$.