

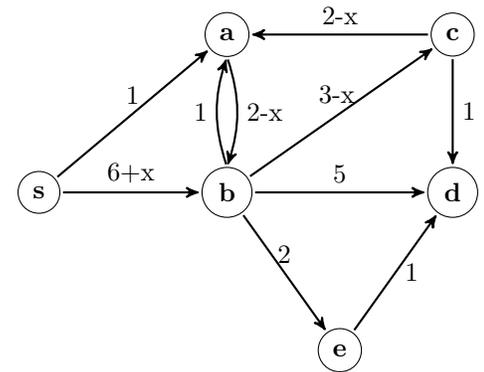
# Graphes

Contrôle continu n° 3, 10 décembre 2020

**Consignes :** durée 45min ; notes de cours et de TD autorisées ; tout appareil électronique interdit.  
 Une feuille de réponses est jointe au sujet pour présenter vos résultats.  
 Les réponses devront être précises et concises.

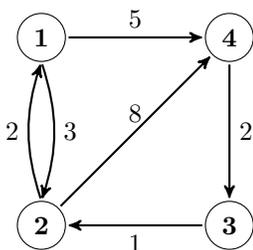
## (1) Plus court chemin entre 2 sommets

On considère le graphe ci-contre où certaines arêtes possèdent un poids paramétré par  $x \in \mathbb{N}$ . On cherche le plus court chemin du sommet  $s$  au sommet  $d$ .



- Pour quelles valeurs de  $x$  doit-on utiliser l'algorithme de Bellman-Ford ? Justifiez.
- Que devrait révéler celui-ci sur le circuit (a)-(b)-(c) si  $x \geq 4$  ? Expliquez brièvement comment. Conclure alors quant à la recherche du plus court chemin (il n'est pas demandé ici de mettre en œuvre l'algorithme).
- À présent  $x=0$ . Nommer et mettez en œuvre l'algorithme adéquat pour trouver le plus court chemin de  $s$  à  $d$ . Il faudra détailler chaque étape de l'algorithme.

## (2) Algorithme de Floyd-Warshall



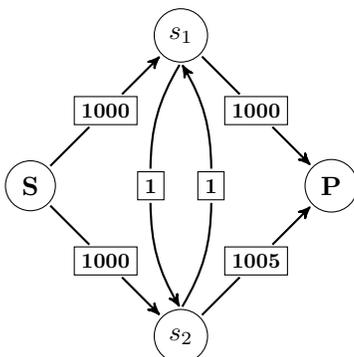
$$D^{(3)} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 3 & \infty & 5 \\ 2 & 2 & 0 & \infty & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 8 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

On cherche à déterminer le plus court chemin entre toutes les paires de sommets du graphe ci-contre par l'algorithme de Floyd-Warshall.

- Donner le tableau  $D^{(0)}$  à l'initialisation.
- Le résultat pour l'étape  $k = 3$  est donné ci-contre. Expliquez combien il reste d'étapes avant de pouvoir conclure. Donnez le résultat final en justifiant les nouvelles valeurs.

## (3) Convergence vers un flot maximum

On considère un réseau de transport, dont les capacités sont représentées sur le graphe ci-contre.



- Initialisez le graphe de flot, représentez le graphe de capacité résiduelle, trouvez un chemin augmentant à 3 arêtes et représentez le flot augmenté.
- À partir du flot trouvé à la question (a), ré-itérez une étape de la méthode de Ford-Fulkerson, toujours en choisissant un chemin augmentant à 3 arêtes. Représentez le flot augmenté.
- Combien d'itérations semblables aux questions (a) et (b) seront nécessaires pour atteindre un flot maximum ? Justifiez en ne représentant que le dernier graphe de capacité résiduelle.
- Proposez deux chemins augmentant amenant plus rapidement au résultat. Sur la base de cet exemple, proposez une amélioration à Ford-Fulkerson pour trouver un chemin augmentant avec le moins d'arêtes possible.