UFR de Mathématique et Informatique
L2 Informatique

Combinatoire — 2005-2006

3ème feuille d'exercices

Justifier soigneusement les réponses

(a) Pour tout entier strictement positif n, montrer que

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} \quad .$$

Que valent ces deux sommes? Indication: calculer $(1 \pm 1)^n$.

(b) Pour $k, m, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq m+n$, montrer que

$$\sum_{i=\max(0,k-n)}^{\min(k,m)} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k} \quad .$$

Indication: compter de deux manières le nombre de parties de cardinal k d'un ensemble E qui est la réunion disjointe de deux ensembles M et N de cardinaux respectifs m et n.

(c) Pour $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$, montrer que

$$\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1} \quad .$$

Indication: utiliser la récurrence avec la formule

$$\binom{u+1}{m+1} = \binom{u}{m} + \binom{u}{m+1} \quad .$$

(d) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer (en utilisant (b)) que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} \quad .$$

(e) Pour $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq m \leq n$, montrer que

$$m \binom{n}{m} = n \binom{n-1}{m-1} \quad ,$$

et pour $m \geq 2$ on a

$$m(m-1) \binom{n}{m} = n(n-1) \binom{n-2}{m-2} \quad .$$

(f) Utiliser la première identité de (e) pour calculer

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \quad .$$

(g) Utiliser les deux identités de (e) pour calculer

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} k^2 \binom{n}{k} \quad .$$