UFR de Mathématique et Informatique
L2 Informatique

Combinatoire — 2005-2006

2ème feuille d'exercices

Justifier soigneusement les réponses

Définitions: Soit $R \subseteq A \times B$ une relation entre deux ensembles A et B. Rappelons que l'*inverse* de R est la relation $R^{-1} \subseteq B \times A$ définie par $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $b\ R^{-1}\ a \;\Leftrightarrow\; a\ R\ b$, et que pour une relation $S \subseteq B \times C$ entre B et C, la *composition* de R et S est la relation $RS \subseteq A \times C$ définie par $\forall a \in A$, $\forall c \in C$, $a\ RS\ c$ si et seulement si $\exists b \in B$ tel que $a\ R\ b$ et $b\ S\ c$. Nous introduisons des définitions supplémentaires :

(a) R est *totale à gauche* si $\forall a \in A,\ \exists b \in B$ tel que $a\ R\ b$.

(b) R est *totale à droite* si et seulement si $\forall b \in B,\ \exists a \in A$ tel que $a\ R\ b$.

(1) Soit $R \subseteq A \times B$ une relation entre A et B. Considérons les relations RR^{-1} et $R^{-1}R$.

(i) Sur quels ensembles sont-elles définies ? Expliciter leur définition en termes de R uniquement.

(ii) Sont-elles symétriques ? Réflexives ? A quelles conditions ?

(2) Soit E un ensemble fini et f une application $E \to E$. On définit sur E la relation $\equiv$ par $x \equiv y$ s'il existe $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $f^i(x) = f^j(y)$. Montrez que:

(i) $\equiv$ est une relation d'équivalence.

(ii) Si $x \equiv y$, alors x et y ont le même cycle attracteur et par conséquent la même période.

(3) Soit R une relation réflexive et transitive sur un ensemble E. On définit la relation $S = R \wedge R^{-1}$ (la conjonction de R et R^{-1}).

(i) Expliciter $x\ S\ y$ en termes de R uniquement.

(ii) Montrer que S est une relation d'équivalence.

(iii) Etant données $x, y \in E$ et leurs classes d'équivalence $[x]_S$ et $[y]_S$ (qui peuvent être égales ou distinctes), montrer que

$$\big(\exists a \in [x]_S,\ \exists b \in [y]_S, \quad a\ R\ b\big) \iff \big(\forall c \in [x]_S,\ \forall d \in [y]_S, \quad c\ R\ d\big) .$$

(iv) Soit E/S l'ensemble des classes d'équivalence de S. Montrer que la relation R' sur E/S définie par

$$[x]_S\ R'\ [y]_S \iff \big(\forall c \in [x]_S,\ \forall d \in [y]_S, \quad c\ R\ d\big) ,$$

est une relation d'ordre large.

Illustrer l'exercice sur le cas particulier où $E = \mathbb{Z}$ et R est la relation "est un diviseur de", c.-à-d. $x\ R\ y \iff \exists z \in \mathbb{Z},\ y = xz$.

(4) Expliciter la formule d'inclusion-exclusion pour 2, 3 et 4 ensembles. Démontrer la formule pour 3 ensembles en utilisant celle pour 2 ensembles.